Reguläre und quasireguläre holomorphe Abbildungen komplexer Mannigfaltigkeiten

---

von

Gerd Fischer

aus Nürnberg

1964

1964 № 40

Reguläre und quasireguläre holomorphe Abbildungen komplexer Mannigfaltigkeiten.

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades
vorgelegt von
Gerd Fischer
aus Nürnberg.

Erlangen, 1964.

Als Dissertation genehmigt von der
Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 22.7.1964
Dekan: Universitätsprofessor Dr. H. Behrens
Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. R. Remmert
Berichterstatter: Universitätsprofessor Dr. G. Nöbeling

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

EINLEITUNG.

Ist $\tau: X \longrightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung der komplexen Mannigfaltigkeit X auf die komplexe Mannigfaltigkeit Y und ist τ regulär, d.h. ist der Rang der Funktionalmatrix von τ (vgl. 1.5) in allen Punkten $x \in X$ gleich der Dimension von Y, so sind die Fasern $\tau^{-1}(y)$, $y \in Y$, von τ gleichdimensionale komplexe Untermannigfaltigkeiten von X. Sind ausserdem die Fasern von τ kompakt, so sind sie nach einem Satz von EHRESMANN (vgl. 4.5) diffeomorph (jedoch i.a. nicht biholomorph äquivalent) und die Abbildung $\tau: X \longrightarrow Y$ beschreibt eine differenzierbare Faserung (vgl. 3.1) über Y als Basis.

Ersetzt man die Bedingung, dass $\tau: X \longrightarrow Y$ regulär ist durch die schwächere Forderung, dass alle Fasern von τ gleichdimensional und singularitätenfrei sind, so lässt sich beweisen, dass jede derartige Abbildung "quasiregulär" ist, d.h. dass es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U = U(x)$ und eine reguläre holomorphe Abbildung $p: U \longrightarrow \mathbb{C}^m$ gibt, deren Fasern die Zusammenhangskomponenten der Fasern von $\tau|U$ sind (vgl. 4.7). Daraus ergibt sich sofort eine Charakterisierung der regulären holomorphen Abbildungen $\tau: X \longrightarrow Y$ durch folgende Eigenschaften (vgl. 4.11):

i) Die Fasern von τ sind gleichdimensionale komplexe Untermannigfaltigkeiten von X.

ii) Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es beliebig kleine Umgebungen $U = U(x)$, sodass die Fasern von $\tau|U$ zusammenhängend sind.

Aus diesen Sätzen, die mit Hilfsmitteln der komplexen Analysis bewiesen werden und schon im reell-analytischen Fall nicht mehr gültig sind (vgl. die durch $y = x^3$ gegebene Abbildung), kann man durch im wesentlichen topologische Betrachtungen (vgl. §3) folgern, dass sich die Singularitäten einer holomorphen Abbildung $\tau: X \longrightarrow Y$, deren Fasern gleichdimensionale zusammenhängende kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten sind, lokal auflösen lassen, und zwar in folgendem Sinne (vgl. 5.4): Es gibt zu jedem Punkt $y_0 \in Y$ eine Umgebung $Z = Z(y_0)$ und für $T = \tau^{-1}(Z)$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{T} & \xrightarrow{\hat{\tau}} & \hat{Z} \\ \downarrow{\scriptstyle \chi} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ T & \xrightarrow{\tau} & Z \end{array},$$

sodass gilt:

i) $\hat{\tau}: \hat{T} \longrightarrow \hat{Z}$ ist eine reguläre holomorphe Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten $\hat{T}$ und $\hat{Z}$.

ii) $\chi\colon \hat{T} \longrightarrow T$ ist eine unverzweigte analytische Überlagerung.

iii) $\sigma\colon \hat{Z} \longrightarrow Z$ ist eine i.a. verzweigte analytische Überlagerung.

Daraus folgt dann (vgl. 5.5), dass jede derartige holomorphe Abbildung $\tau\colon X \longrightarrow Y$ einen differenzierbaren SEIFERTschen Faserraum (vgl. 3.15) beschreibt, der genau dann eine differenzierbare Faserung ist, wenn τ regulär ist.

Weiterhin ergibt sich eine einfache topologische Bedingung für die Regularität einer quasiregulären holomorphen Abbildung (vgl. 5.3): Jede kompakte holomorphe Abbildung $\tau\colon X \longrightarrow Y$, deren Fasern gleichdimensionale zusammenhängende und einfach zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten sind, ist regulär.

Die Paragraphen 1 und 2 geben eine Zusammenfassung von teilweise wohlbekannten Hilfsmitteln der komplexen Analysis, hauptsächlich aus Arbeiten von R. REMMERT und K. STEIN. In Paragraph 3 wird unter Verwendung von Methoden von STEENROD [23] mit Hilfe des Begriffs der quasitransversalen Zerlegung einer Faserung (vgl. 3.7) bewiesen, dass sich in gewissen Faserungen diskrete oder endliche Strukturgruppen einführen lassen (vgl. 3.9 und 3.11). Jede quasitransversal zerlegbare Faserung hat auch eine "Struktur in der transversalen Richtung" : Sie ist ein SEIFERTsches Produkt über dem

Quotienten der Faser nach einer diskreten Gruppe (vgl. 3.15). Die Ergebnisse der ersten drei Paragraphen werden in den Paragraphen 4 und 5 dazu benutzt, um die oben angedeuteten Aussagen zu beweisen.

Herrn Professor Dr. R. Remmert bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für die fortwährende Unterstützung bei der Durchführung zu grossem Dank verpflichtet. Ausserdem gilt mein Dank Herrn Professor Dr. G. Nöbeling für seine Förderung, sowie all denen, die durch Rat und Kritik zur Klärung vieler Fragen beigetragen haben.

INHALTSÜBERSICHT.

§ 1. Holomorphe Abbildungen 1

§ 2. Analytische Zerlegungen komplexer Räume 10

§ 3. Schnitte und Quasischnitte in Faserungen 19

§ 4. Quasireguläre holomorphe Abbildungen 42

§ 5. Auflösung der Singularitäten gewisser quasiregulärer holomorpher Abbildungen 52

Literaturverzeichnis 63

§ 1. HOLOMORPHE ABBILDUNGEN.

Falls nichts anderes ausdrücklich angegeben wird, bezeichnen in diesem Paragraphen X und Y stets zusammenhängende normale komplexe Räume (vgl. [4]) mit abzählbarer Topologie*). $\tau: X \longrightarrow Y$ bezeichnet eine holomorphe Abbildung.

1.1. Eine holomorphe Abbildung $\tau: X \longrightarrow Y$ heisst biholomorph, falls sie eineindeutig ist und die Umkehrabbildung $\tau^{-1}: \tau(X) \longrightarrow X$ holomorph ist.

Es gilt (vgl. [19, Satz 32]) der

Satz. Eine eineindeutige holomorphe Abbildung des normalen komplexen Raumes X auf den normalen komplexen Raum Y ist biholomorph.

1.2. Die Fasern einer holomorphen Abbildung $\tau: X \longrightarrow Y$ sind die in X analytischen Mengen $\tau^{-1}(y)$, $y \in Y$. $\tau^{-1}(\tau(x))$ heisst die durch $x \in X$ gehende Faser von τ. Die Zusammenhangskomponenten der Fasern von τ heissen Niveaumengen von τ.

1.3. Der Dimensionsrang r von τ ist folgendermassen definiert (vgl. [19, S. 346]):

---

*) Die Bedeutung dieser Bedingung für die Abbildungstheorie sieht man aus [14].

Für einen Punkt $x \in X$ ist $r(x) = \operatorname{codim} \tau^{-1}(\tau(x))$. Es ist $r(M) = \sup_{x \in M} r(x)$ für $M \subset X$ und es ist $r = r(X)$.

Satz. Für jede natürliche Zahl m ist die Menge $\{x \in X | r(x) \leq m\}$ analytisch in X.

Zum Beweis vgl. [19, Satz 17].

1.4. Die Entartungsmenge E von τ ist die nach Satz 1.3 in X analytische Menge $E = \{x \in X | r(x) < r\}$. Falls die Entartungsmenge leer ist, heisst die Abbildung τ nirgends entartet. Die Fasern von τ haben in diesem Falle alle die gleiche Dimension.

In [19, Satz 19] wird bewiesen:

Satz. Ist $\tau: X \longrightarrow Y$ eine nirgends entartete holomorphe Abbildung vom Dimensionsrang r, so gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis $\{U_i(x)\}$ derart, dass $\tau(U_i)$ eine rein r-dimensionale lokalanalytische Menge in Y ist.

1.5. Zwischen uniformisierbaren Punkten $x = (v_1,\ldots,v_n) \in V \subset X$ und $\tau(x) = (w_1,\ldots,w_m) \in W \subset Y$ lässt sich eine holomorphe Abbildung $\tau: X \longrightarrow Y$ durch in V holomorphe Funktionen $w_\mu = f_\mu(v_1,\ldots,v_n)$, $\mu = 1,\ldots,m$, beschreiben. Der offenbar von der Wahl der Koordinatensysteme unabhängige Matrixrang $\rho(x)$ von τ im Punkte x ist erklärt als Rang der Funktional-

matrix

$$\left(\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(v_1,\dots,v_n)}\right)$$

im Punkte x. Es ist $\rho(M) = \sup_{x \in M} \rho(x)$ für $M \subset X$ und es ist $\rho = \rho(X)$.

$S = \{x \in X \mid \rho(x) < \rho\}$ heisst Singularitätenmenge von τ. S wird durch Determinantengleichungen beschrieben, ist also eine in X analytische Menge.

1.6. Dimensionsrang und Matrixrang stimmen in einem Punkt $x \in X$ nicht notwendig überein, es gilt aber $\rho(x) \leq r(x)$. Falls X und Y komplexe Mannigfaltigkeiten sind, ist ρ auf ganz X definiert und die Entartungsmenge ist in der Singularitätenmenge enthalten. Die globalen Ränge $\rho(X)$ und $r(X)$ sind stets gleich. Man bezeichnet sie als Rang von τ (vgl. dazu [19, § 3]).

1.7. Das Bild $\tau(X) \subset Y$ ist im allgemeinen keine in Y analytische Menge, aber es besteht eine Beziehung zwischen dem Rang von τ und der topologischen Dimension (vgl. [13]) von $\tau(X)$:

Satz. Ist $\tau: X \longrightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung vom Rang r eines komplexen Raumes X mit abzählbarer Topologie in einen komplexen Raum Y, so ist $\tau(X)$ ein metrisierbarer Unterraum von Y mit abzählbarer Topologie und die topologische Dimension von $\tau(X)$ ist gleich 2r.

Zum Beweis vgl. [20, Satz 1].

1.8. Eine besonders wichtige Rolle spielen die "kompakten" holomorphen Abbildungen. Nach BOURBAKI [4] definiert man:

Seien X,Y lokalkompakte topologische Räume und sei $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. f heisst kompakt, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subset Y$ auch $f^{-1}(K) \subset X$ kompakt ist.

K. STEIN (vgl. [16, Hilfssatz 3]) hat bewiesen:

Lemma. Seien X und Y lokalkompakte topologische Räume und sei $f: X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Ist die durch einen Punkt $x \in X$ hindurchgehende Niveaumenge N von f kompakt, so gibt es relativkompakte Umgebungen $V = V(N) \subset\subset X$ und $W = W(f(x)) \subset\subset Y$ derart, dass $f(V) \subset W$ und $f|V: V \longrightarrow W$ kompakt ist.

Insbesondere ist die Voraussetzung erfüllt, falls f diskret ist, d.h. die Fasern von f diskrete Mengen sind (vgl. [11, Hilfssatz 1]).

1.9. Es gilt der folgende Abbildungssatz (vgl. [19, Satz 23]):

Satz. Sei $\tau: X \longrightarrow Y$ eine kompakte holomorphe Abbildung und $M \subset X$ eine analytische Menge. Dann ist

$\tau(M)$ eine $r(M)$-dimensionale (vgl. 1.3) analytische Menge in Y.

1.10. Für eine Abbildung $\varphi: X \longrightarrow Y$ einer Menge X in eine Menge Y definiert man den Graphen

$$G_\varphi = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = \varphi(x)\}.$$

Die Holomorphie einer Abbildung lässt sich in folgender Weise durch ihren Graphen charakterisieren (vgl. [19, § 5]):

Satz. Es sei $\tau: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung des normalen komplexen Raumes X in den normalen komplexen Raum Y. τ ist genau dann holomorph, wenn der Graph G_τ eine mit X gleichdimensionale analytische Menge in $X \times Y$ ist.

1.11. Unter bestimmten Bedingungen sind holomorphe Abbildungen offen (vgl. [19, Satz 28]):

Satz. X und Y seien normale komplexe Räume, Y habe die Dimension r und $\tau: X \longrightarrow Y$ sei eine holomorphe Abbildung. τ ist genau dann offen, wenn es nirgends entartet und vom Range r ist.

Durch Übergang zur Normalisierung (vgl. [10,§6]) sieht man sofort, dass Satz 1.11 auch für nicht normale aber irreduzible komplexe Räume X und Y gilt.

1.12. Eine einfache Folgerung von Satz 1.11 ist das

Lemma. Sei X ein komplexer Raum, in dem jede kompakte analytische Menge endlich ist*), Y ein komplexer Raum der Dimension k und sei $V \subset\subset X$ eine relativkompakte offene Teilmenge. Eine k-dimensionale analytische Menge $A \subset X \times Y$ sei ganz in $V \times Y$ enthalten. Dann ist für jeden Punkt $y \in Y$ die Menge $A \cap (V \times y)$ nicht leer und endlich **).

Beweis: Sei $\overline{V} = V \cup \partial V$ die abgeschlossene Hülle von V in X. Da $A \cap (\partial V \times y) = \emptyset$ für alle $y \in Y$, ist $A \cap (V \times y) = A \cap (\overline{V} \times y)$, d.h. $A \cap (V \times y)$ ist eine kompakte analytische Menge in $V \times y \cong V \subset X$. Daraus folgt, dass $A \cap (V \times y)$ endlich ist.

Bezeichnet $p: X \times Y \longrightarrow Y$ mit $p(x,y) = y$ die Projektionsabbildung, so genügt es zu zeigen, dass für eine k-dimensionale irreduzible Komponente $A' \subset A$

*) Diese Bedingung ist z.B. für K-vollständige oder holomorph separable komplexe Räume erfüllt (vgl. [9]).

**) Eine entsprechende Aussage für Gebiete im $\mathbb{C}^n$ wird in [1, 34.27] bewiesen. Für allgemeinere Sätze dieser Art vgl. [18].

das Bild $p(A') \subset Y$ zugleich offen und abgeschlossen ist. Die Abbildung $p|A': A' \longrightarrow Y$ ist nirgends entartet, also nach Satz 1.11 offen; daher ist $p(A') \subset Y$ offen. Ist (y_i) mit $y_i \in p(A')$ eine gegen einen Punkt $y \in Y$ konvergente Folge, so gibt es eine Folge (a_i) mit $a_i \in A'$ und $p(a_i) = y_i$. Da $V \subset\subset X$ relativkompakt, Y lokalkompakt und $A \subset V \times Y$ abgeschlossen ist, gibt es eine Teilfolge der Folge (a_i), die gegen einen Punkt $a \in A'$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit der Abbildung p ist $p(a) = y$, daher ist $y \in p(A')$ und $p(A') \subset Y$ ist abgeschlossen.

1.13. Die in der Theorie der holomorphen Abbildungen auftretenden Überlagerungen $\eta: \tilde{X} \longrightarrow X$ sind im allgemeinen verzweigt, d.h. nur ausserhalb einer analytischen Ausnahmemenge $A \subset X$ Überlagerungen im üblichen Sinne (vgl. z.B. [22]). In [10] wird die folgende Definition gegeben:

Es sei X ein normaler komplexer Raum, $\tilde{X}$ ein lokalkompakter topologischer Raum und $\eta: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine stetige surjektive Abbildung. Die Abbildung $\eta: \tilde{X} \longrightarrow X$ heisst analytische Überlagerung von X, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) η ist diskret und kompakt (vgl. 1.8).

ii) Es gibt eine analytische Menge $A \subset X$ sodass $\eta^{-1}(A)$ in $\tilde{X}$ nirgends zerlegend ist und $\eta|\tilde{X} - \eta^{-1}(A): \tilde{X} - \eta^{-1}(A) \longrightarrow X - A$ lokaltopologisch ist.

Dabei heisst eine Menge $M \subset \tilde{X}$ nirgends zerlegend, wenn für jede nicht leere offene zusammenhängende Menge $O \subset \tilde{X}$ auch $O - (O \cap M)$ nicht leer und zusammenhängend ist.

Jede analytische Überlagerung in diesem Sinne ist also, da η als kompakt vorausgesetzt wird, endlichblättrig.

Dass $\eta: \tilde{X} \longrightarrow X$ ausserhalb von A eine unverzweigte Überlagerung ist, sieht man wie folgt: Für lokalkompakte topologische Räume $\tilde{X}$ und X ist eine surjektive, diskrete, kompakte und lokaltopologische Abbildung $\xi: \tilde{X} \longrightarrow X$ stets eine unverzweigte Überlagerungsabbildung. Dabei heisst ξ lokaltopologisch, falls es zu je zwei Punkten $x \in X$ und $\tilde{x} \in \xi^{-1}(x)$ Umgebungen $U = U(x)$ und $\tilde{U} = \tilde{U}(\tilde{x})$ gibt, die durch $\xi|\tilde{U}$ topologisch aufeinander abgebildet werden. Da ξ als kompakt vorausgesetzt ist, folgt, dass für eine genügend kleine Umgebung $U = U(x)$ jede Zusammenhangskomponente von $\xi^{-1}(U) \subset \tilde{X}$ einen Punkt $\tilde{x} \in \xi^{-1}(x)$ enthält und topologisch auf U abgebildet wird, was zu zeigen war.

1.14. Setzt man $\tilde{X}$ als normalen komplexen Raum und η als holomorphe Abbildung voraus, so wird die Bedingung ii) in 1.13 überflüssig. Es gilt (vgl. [20, Satz 3]) der

Satz. Eine surjektive, diskrete und kompakte holomorphe Abbildung $\eta: \tilde{X} \longrightarrow X$ zwischen den normalen komplexen Räumen $\tilde{X}$ und X ist eine analytische Überlagerung.

1.15. Sei $\eta: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine analytische Überlagerung und sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$. $\tilde{x}$ heisst Verzweigungspunkt der Überlagerung η, falls keine Umgebung $\tilde{U}(\tilde{x})$ topologisch auf $\eta(\tilde{U})$ abgebildet wird. Sei $\tilde{V} \subset \tilde{X}$ die Menge der Verzweigungspunkte und $V = \eta(\tilde{V})$. V ist die minimale Ausnahmemenge und $\tilde{V}$ heisst Verzweigungsmenge der analytischen Überlagerung $\eta: \tilde{X} \longrightarrow X$.

Es gilt (vgl. [10, Satz 11]) das

Lemma. Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\eta: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine analytische Überlagerung, so ist das Bild $\eta(\tilde{V})$ der Verzweigungsmenge $\tilde{V}$ von η entweder leer oder eine rein 1-codimensionale analytische Menge in X.

§ 2. ANALYTISCHE ZERLEGUNGEN KOMPLEXER RÄUME.

Dieser Paragraph enthält eine kurze Zusammenfassung einiger Ergebnisse von K. STEIN (vgl. [24], [25], [26]). Äquivalenzrelationen auf topologischen Räumen werden bei BOURBAKI [3] systematisch untersucht.

2.1. Sei R ein topologischer Raum. Eine Zerlegung $\mathcal{Y}$ von R ist eine Äquivalenzrelation auf R. Die Elemente der Zerlegung sind die Äquivalenzklassen bezüglich $\mathcal{Y}$, sie bilden eine Überdeckung von R mit disjunkten Mengen. Für zwei äquivalente Punkte $r,s \in R$ schreibt man $r \sim s(\mathcal{Y})$.

Die Saturierung einer Teilmenge $M \subset R$ bezüglich ist definiert als

$$\mathrm{sat}_{\mathcal{Y}}(M) = \{r \in R \mid r \sim s(\mathcal{Y}) \text{ für ein } s \in M\}.$$

M heisst saturiert bezüglich $\mathcal{Y}$, falls $M = \mathrm{sat}_{\mathcal{Y}}(M)$. $\mathcal{Y}: R \longrightarrow R/\mathcal{Y}$ sei die natürliche Abbildung auf den Quotientenraum. Auf $R/\mathcal{Y}$ lässt sich die Quotiententopologie einführen, d.h. eine Menge $N \subset R/\mathcal{Y}$ heisst offen genau dann, wenn $\mathcal{Y}^{-1}(N) \subset R$ offen ist.

2.2. Eine Zerlegung von R heisst einfach, falls ihre Elemente zusammenhängende Teilmengen von R sind. Zu jeder Zerlegung $\mathcal{Y}$ von R lässt sich eine zugeordnete einfache Zerlegung $\mathcal{Y}_e$ erklären, deren Elemente die Zusammenhangskomponenten der Elemente von $\mathcal{Y}$ sind (vgl.

[3, § 11, Prop.9]). γ ist demnach einfach, falls $\gamma = \gamma_e$.

2.3. Eine Zerlegung γ von R heisst offen, wenn $\gamma: R \longrightarrow R/\gamma$ eine offene Abbildung ist, d.h. für jede offene Menge $M \subset R$ auch $sat_\gamma(M) \subset R$ offen ist.

2.4. Seien R, R' topologische Räume und sei $\varphi: R \longrightarrow R'$ eine stetige Abbildung. Zwei Punkte $r,s \in R$ sollen äquivalent heissen, falls $\varphi(r) = \varphi(s)$; die so gewonnene Äquivalenzrelation $\bar{\varphi}$ heisst die durch die Abbildung φ auf R bestimmte Zerlegung.

Die Äquivalenzklassen von $\bar{\varphi}$ bzw. $\bar{\varphi}_e$ sind die Fasern bzw. die Niveaumengen von φ. Man hat das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ {\scriptstyle\bar{\varphi}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\varphi} \\ R/\bar{\varphi} & \xrightarrow{\gamma} & \varphi(R) \subset R' \end{array}$$

wobei $\bar{\varphi}$ die natürliche Quotientenabbildung und γ eine eineindeutige stetige Abbildung ist derart, dass das Diagramm kommutiert. γ ist genau dann eine topologische Abbildung, wenn für jede offene bezüglich $\bar{\varphi}$ saturierte Menge $M \subset R$ auch $\varphi(M) \subset R'$ offen ist.

2.5. Nun sei γ eine Zerlegung eines komplexen Raumes X. γ heisst analytische Zerlegung von X, falls es einen komplexen Raum Y* und eine surjektive holomorphe Abbildung $\gamma^*: X \longrightarrow Y^*$ gibt, deren Fasern die

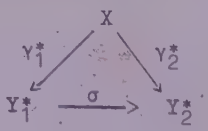
Äquivalenzklassen von γ sind.

Die Äquivalenzklassen einer analytischen Zerlegung von X sind somit in X analytische Mengen.

Y^* heisst komplexer Zerlegungsraum von X nach γ. Im allgemeinen ist er nicht eindeutig bestimmt (vgl. [25]), es gilt jedoch das

Lemma. Ist γ eine analytische Zerlegung eines normalen komplexen Raumes X in gleichdimensionale analytische Mengen, so sind zwei normale komplexe Zerlegungsräume Y_1^* und Y_2^* von X nach γ stets biholomorph äquivalent.

Beweis: Die natürlichen holomorphen Abbildungen $\gamma_1^*: X \longrightarrow Y_1^*$ und $\gamma_2^*: X \longrightarrow Y_2^*$ sind nirgends entartet und daher nach Satz 1.11 offen und es gibt eine eineindeutige Abbildung $\sigma: Y_1^* \longrightarrow Y_2^*$, sodass das Diagramm



kommutiert. Sei $\gamma_1^* \times \gamma_2^*: X \longrightarrow Y_1^* \times Y_2^*$ die Produktabbildung. Da γ_2^* stetig und γ_1^* offen ist, ist σ eine stetige Abbildung. Daher ist der Graph G_σ von σ abgeschlossen in $Y_1^* \times Y_2^*$ (vgl. [3]). Da $(\gamma_1^* \times \gamma_2^*)(X)$ nach Satz 1.4 eine mit Y_1^* gleichdimensionale lokalanalytische Menge in $Y_1^* \times Y_2^*$ ist, und da $(\gamma_1^* \times \gamma_2^*)(X) = G_\sigma$, folgt die Holomorphie von σ aus Satz 1.10. Weiter folgt aus Satz 1.1, dass σ biholomorph ist.

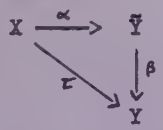
2.6. Sind X,Y komplexe Räume und ist $\tau: X \longrightarrow Y$ eine surjektive holomorphe Abbildung, so ist die durch τ bestimmte Zerlegung $\bar{\tau}$ von X stets analytisch. Die $\bar{\tau}$ zugeordnete einfache Zerlegung $\bar{\tau}_e$ braucht jedoch nicht analytisch zu sein. Nach [25, Satz 10] und [6, § 5] gilt der

Satz. Sei $\tau: X \longrightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung des komplexen Raumes X in den komplexen Raum Y derart, dass die Niveaumengen von τ in X kompakt sind. Dann ist die durch τ auf X bestimmte einfache Zerlegung $\bar{\tau}_e$ analytisch.

2.7. Aus Satz 2.6 ergibt sich der STEINsche Faktorisierungssatz (vgl. [20, Satz 4] und [25, Satz 12]). Ein Spezialfall davon lautet:

Satz. Seien X und Y normale komplexe Räume und sei $\tau: X \longrightarrow Y$ eine kompakte surjektive holomorphe Abbildung. Dann gibt es einen mit Y gleichdimensionalen normalen komplexen Raum $\tilde{Y}$ und kompakte holomorphe Abbildungen $\alpha: X \longrightarrow \tilde{Y}$ und $\beta: \tilde{Y} \longrightarrow X$ derart, dass

i) das Diagramm



kommutiert,

ii) die Fasern von α in X zusammenhängend sind und

iii) β eine analytische Überlagerung ist.

2.8. Von besonderer Bedeutung in der Theorie der analytischen Zerlegungen ist ein von K. STEIN angegebener Konvergenzsatz für analytische Mengen, der hier in einem einfachen Spezialfall gezeigt werden soll.

Dazu benötigt man zunächst den Begriff der Konvergenz von Teilmengen eines topologischen Raumes X (vgl. [2, II § 5] und [11, §28]).

Die Menge $A \subset X$ heisst topologischer Limes der Folge (A_i), $i = 1,2,\ldots$, von Mengen $A_i \subset X$, wenn für jede Umgebung $U(x)$ eines Punktes $x \in A$ und für fast alle i $A_i \cap U \neq \emptyset$ und es zu jedem Punkt $x' \in X - A$ eine Umgebung $U'(x')$ gibt, in die nur endlich viele Mengen A_i eindringen.

In einem topologischen Raum X mit einer Metrik $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst die abgeschlossene Menge $A \subset X$ metrischer Limes der Folge (A_i), $i = 1,2,\ldots$, von abgeschlossenen Mengen $A_i \subset X$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein i_o gibt, sodass $A_i \subset O_\varepsilon(A)$ und $A \subset O_\varepsilon(A_i)$ für alle $i \geq i_o$. Dabei ist für eine Menge $M \subset X$ $O_\varepsilon(M) = \{x \in X \mid d(M,x) < \varepsilon\}$.

Es gilt nach [2, II § 5, Satz VI] das

Lemma. In einem kompakten metrischen Raum sind topologischer und metrischer Limes gleichwertig.

Satz. In einem n-dimensionalen komplexen Raum X sei eine k-dimensionale irreduzible analytische Menge A gegeben. (A_i) sei eine Folge rein k-dimensionaler analytischer Mengen $A_i \subset X^* = X - A$, die in X^* keinen Häufungspunkt besitzt. Ist dann ein Punkt $a \in A$ Häufungspunkt von Punkten $a_i \in A_i$, so ist A topologischer Limes der Folge (A_i).

2.9. Der Beweis ist eine direkte Folgerung aus einem Satz von REMMERT-STEIN-THULLEN über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen (vgl. [21] und [27]). Er sagt aus:

Satz. Ist A eine k-dimensionale irreduzible analytische Menge in einem n-dimensionalen komplexen Raum X, wobei $k < n$, und ist $M \subset X - A$ eine rein k-dimensionale analytische Menge, so ist entweder M in jeden Punkt von A fortsetzbar oder jeder Punkt von A ist wesentlich singulärer Randpunkt von M.

Zum Beweis von Satz 2.8 kann man nun $M = \bigcup_i A_i$ setzen. Da die Folge (A_i) keinen Häufungspunkt in $X^* = X - A$ besitzt und aus gleichdimensionalen Komponenten besteht, ist M eine rein k-dimensionale analytische

Menge in X*. Eine Fortsetzung von M in den Häufungspunkt $a \in A$ ist nicht möglich, da M in jeder Umgebung von a unendlich viele Komponenten besitzt. Daher folgt aus Satz 2.9, dass jeder Punkt $a' \in A$ wesentlich singulärer Randpunkt von M ist. Das ist aber nur möglich, wenn in jede Umgebung von a' fast alle Elemente der Folge (A_i) eindringen.

2.10. Eine analytische Zerlegung eines komplexen Raumes in gleichdimensionale und reindimensionale analytische Mengen ist nach Satz 1.11 stets offen. Mit Hilfe von Satz 2.8 kann man beweisen (vgl. [26]):

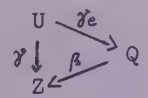
Satz. Sei X ein komplexer Raum und γ eine analytische Zerlegung von X, sodass die Zusammenhangskomponenten der Elemente von γ gleichdimensional und irreduzibel sind. Dann ist die γ zugeordnete einfache Zerlegung γ_e eine offene Zerlegung.

Beweis: Sei $O \subset X$ eine offene Menge und $\tilde{O} = \mathrm{sat}_{\gamma_e}(O)$. Angenommen, $\tilde{O}$ sei nicht offen. Dann gibt es einen Punkt $x \in \tilde{O}$ und eine Folge (x_i) von Punkten $x_i \in X - \tilde{O}$, die gegen x konvergiert. Sei $A = \mathrm{sat}_{\gamma_e}(x)$ und $A_i = \mathrm{sat}_{\gamma_e}(x_i)$. Alle Häufungspunkte der Folge (A_i) sind in der analytischen Menge $\hat{A} = \mathrm{sat}_{\gamma}(x)$ enthalten und A ist eine Zusammenhangskomponente von $\hat{A}$. Sei $X^* = X - (\hat{A} - A)$ und $X^{**} = X - \hat{A}$. Die Folge (A_i) hat in

X^{**} keine Häufungspunkte, daher kann man Satz 2.8 in dem komplexen Raum X^* anwenden und erhält, dass jeder Punkt $x' \in A \cap O$ Häufungspunkt der Folge (A_i) ist. Da O offen ist und stets $A_i \cap O = \emptyset$, ergibt sich ein Widerspruch.

2.11. Satz. Sei X ein holomorph separabler komplexer Raum, Y ein komplexer Raum der Dimension k und seien $V \subset\subset X$ bzw. $W \subset\subset Y$ relativkompakte offene zusammenhängende Teilmengen. Auf einem komplexen Teilraum $U^* \subset V \times Y$ sei eine analytische Zerlegung $\gamma^*: U^* \longrightarrow Z^*$ gegeben, deren Elemente $\gamma^{*-1}(z)$, $z \in Z^*$, in $X \times Y$ *) rein k-dimensionale analytische Mengen mit irreduziblen Zusammenhangskomponenten sind. Sei $\gamma: U \longrightarrow Z$ die von γ^* auf $U = U^* \cap (V \times W)$ induzierte Zerlegung und γ_e die γ zugeordnete einfache Zerlegung. Dann ist $Q = U/\gamma_e$ ein hausdorffscher Raum.

Beweis: Sei $p \in Q$ und $H(p) = \{q_j \mid j \in I\}$ die Menge der von p verschiedenen Punkte q_i, die sich nicht von p trennen lassen. Da es eine stetige Abbildung $\beta: Q \longrightarrow Z$ gibt, sodass das Diagramm



*) Das bedeutet insbesondere, dass die Mengen $\gamma^{*-1}(z) \subset U^*$ in $X \times Y$ abgeschlossen sind und ihre abgeschlossene Hülle nirgends den Rand $\partial V \times Y$ von $V \times Y$ trifft.

kommutiert, ist $\beta(p) = \beta(q_j)$ für alle $j \in I$. Da $\gamma^{-1}(\beta(p))$ eine in U analytische Menge ist, folgt aus Lemma 1.12, dass H(p) eine endliche Menge ist. Angenommen, Q sei nicht hausdorffsch. Dann gibt es einen Punkt $p \in Q$, sodass $H(p) = \{q_j \mid j = 1,\ldots,l\} \neq \emptyset$. Da $\gamma_e: U \longrightarrow Q$ nach Satz 2.10 eine offene Abbildung ist, bedeutet das folgendes: Für die punktfremden und zusammenhängenden Mengen $A = \gamma_e^{-1}(p)$ und $B^{(j)} = \gamma_e^{-1}(q_j)$ und für Umgebungsbasen $\{M_i\}$ bzw. $\{N_i^{(j)}\}$ von Punkten $a \in A$ bzw. $b^{(j)} \in B^{(j)}$ existiert zu jedem i ein Element C_i der Zerlegung γ_e, das in die Mengen M_i und $N_i^{(j)}$ eindringt. Alle Häufungspunkte der Folge (C_i) sind in $D = A \cup B^{(1)} \cup \ldots \cup B^{(l)}$ enthalten. Bezeichnen $\overline{D}$ bzw. $\overline{C}_i$ die abgeschlossenen Hüllen von D bzw. C_i in $\overline{V} \times \overline{W}$, so folgt aus Satz 2.8 und Lemma 2.8, dass die Folge $(\overline{C}_i)$ in $\overline{V} \times \overline{W}$ metrisch gegen $\overline{D}$ konvergiert. Es sind also für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle Mengen $\overline{C}_i \subset O_\varepsilon(\overline{D}) \subset \overline{V} \times \overline{W}$. Ausserdem sind nach Lemma 1.12 die Mengen $D \cap (y \times V) = \{d_1,\ldots,d_N\}$, $y \in \overline{W}$, endlich. Man kann daher ε so klein wählen, dass für alle $y \in \overline{W}$ die Menge $O_\varepsilon(\overline{D}) \cap (y \times V)$ in punktfremde Umgebungen $O_\varepsilon^1(d_1),\ldots,O_\varepsilon^N(d_N)$ zerfällt. Sei $c \in \overline{C}_i \cap O_\varepsilon(\overline{D}) \cap (y \times V)$, sodass $c \in O_\varepsilon^\nu(d_\nu)$. Definiert man $\varphi(c) = d_\nu$, so erhält man eine stetige Abbildung $\varphi: \overline{C}_i \longrightarrow \overline{D}$ mit $\varphi(C_i) = D$. Da alle Mengen C_i zusammenhängend sind und D in mindestens zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt ist ein Widerspruch hergeleitet.

§ 3. SCHNITTE UND QUASISCHNITTE IN FASERUNGEN.

Die für diesen Paragraphen grundlegenden Definitionen und Eigenschaften von Faserbündeln sind zum Beispiel in [23] enthalten.

3.1. Seien B, X und F topologische Räume und sei $\pi: B \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung. Dann heisst $\mathcal{B} = (B,\pi,X,F)$ eine Faserung mit

dem Faserraum B,

der Basis X,

der Projektion $\pi: B \longrightarrow X$ und

der Faser F, falls folgendes gilt:

i) Es gibt eine offene Überdeckung $\{V_j\}_{j \in J}$ von X mit Koordinatenumgebungen V_j und zu jedem $j \in J$ eine topologische Abbildung $\Phi_j: V_j \times F \longrightarrow \pi^{-1}(V_j)$ mit $\pi(\Phi_j(x,f)) = x$ für $x \in V_j$ und $f \in F$. Φ_j heisst Koordinatenfunktion und für $x \in X$ heisst $F_x = \pi^{-1}(x)$ Faser über x.

Eine Abbildung $\pi_j: \pi^{-1}(V_j) \longrightarrow F$ ist gegeben durch $\pi_j(b) = \Phi_{j,x}^{-1}(b)$, wenn $b \in \pi^{-1}(V_j)$ und $x = \pi(b)$.

Sei G eine effektive topologische Transformationsgruppe von F (vgl. z.B. [23, 2.2]). Dann heisst $\mathcal{B} = (B,\pi,X,F,G)$ Faserbündel mit der Strukturgruppe G, falls zusätzlich zu i) gilt:

ii) Ist $\Phi_{j,x}: F \longrightarrow F_x$ definiert durch $\Phi_{j,x}(f) = \Phi_j(x,f)$, so stimmt für jedes Paar $i,j \in J$ und jedes $x \in V_i \cap V_j$ der Homöomorphismus $\Phi_{j,x}^{-1} \cdot \Phi_{i,x}: F \longrightarrow F$ mit der Operation eines Elementes von G überein und

iii) die durch $g_{ji}(x) = \Phi_{j,x}^{-1} \cdot \Phi_{i,x}$ definierte Abbildung $g_{ji}: V_i \cap V_j \longrightarrow G$ ist stetig.

Eine Faserung $B = (B,\pi,X,F)$ heisst differenzierbar (differenzierbar wird immer im Sinne von differenzierbar vom Typ C^∞ verwendet), falls B,X und F differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind, $\pi: B \longrightarrow X$ eine differenzierbare Abbildung ist und die Koordinatenfunktionen $\Phi_j: V_j \times F \longrightarrow \pi^{-1}(V_j)$ Diffeomorphismen sind, wobei $V_j \times F$ als differenzierbare Mannigfaltigkeit mit der Produktstruktur versehen ist.

Ein Faserbündel $B = (B,\pi,X,F,G)$ mit der Strukturgruppe G heisst differenzierbar, falls ausserdem G eine reelle LIEsche Gruppe ist, die differenzierbar auf F operiert, und $g_{ji}: V_i \cap V_j \longrightarrow G$ eine differenzierbare Abbildung ist.

Man kann zwar einer Faserung als Gruppe die Gruppe aller Homöomorphismen der Fasern zuordnen, es entstehen jedoch Schwierigkeiten, diese Gruppe mit

einer geeigneten Topologie zu versehen (vgl. [23,§ 5]) bzw. im differenzierbaren Fall die Gruppe aller Diffeomorphismen der Faser zu einer reellen LIEschen Gruppe zu machen. Daher scheint die Einführung von Faserungen ohne Strukturgruppe für gewisse Untersuchungen, bei denen die Struktur der Gruppe keine entscheidende Rolle spielt, gerechtfertigt.

3.2. Im Folgenden sei, falls Überlagerungen (vgl. [22, § 53]) der Basis X betrachtet werden, X stets als wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend vorausgesetzt. Alle in diesem Paragraphen auftretenden Überlagerungen seien unverzweigt.

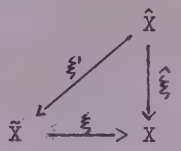
Ist $\xi: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung, $x \in X$ und $\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_i,\ldots\} = \xi^{-1}(x)$, so induziert ξ Monomorphismen $\xi^i_*: \Pi(\tilde{X},\tilde{x}_i) \longrightarrow \Pi(X,x)$ der Fundamentalgruppen von $\tilde{X}$ in $\tilde{x}_i$ bzw. X in x. $G = \Pi/\Gamma$ heisst Monodromiegruppe der Überlagerung $\xi: \tilde{X} \longrightarrow X$, wobei $\Pi = \Pi(X,x)$ und $\Gamma = \bigcap_i \xi^i_*(\Pi(\tilde{X},\tilde{x}_i))$ (vgl. [22, § 58]). Eine Überlagerung heisst normal*), falls die konjugierten Untergruppen $\xi^i_*(\Pi(\tilde{X},\tilde{x}_i)) \subset \Pi$ alle gleich, d.h. Normalteiler von Π sind.

---

*) In [22] wird eine derartige Überlagerung regulär genannt. Diese Bezeichnung wird jedoch in § 4 in anderem Sinne gebraucht.

Lemma. Ist $\xi: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung, so gibt es stets Überlagerungen $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ und $\xi': \hat{X} \longrightarrow \tilde{X}$ sodass

i) Das Diagramm



kommutiert,

ii) $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ und $\xi': \hat{X} \longrightarrow \tilde{X}$ normal sind und

iii) falls ausserdem $\xi: \tilde{X} \longrightarrow X$ endlichblättrig ist, auch $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ endlichblättrig ist.

Beweis: Sei $x \in X$, $\Pi = \Pi(X,x)$, $\Gamma_i = \xi_*^i(\Pi(\tilde{X},\tilde{x}_i))$ und $\Gamma = \bigcap_i \Gamma_i$. Falls der Index von Γ_i in Π endlich ist, ist auch der Index von Γ in Π endlich (vgl. [15, S. 83]). Wegen der Beziehungen zwischen Klassen konjugierter Untergruppen von Π und Überlagerungen von X (vgl. [22, § 55]) hat die zu $\Gamma \subset \Pi$ gehörende Überlagerung $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ die behaupteten Eigenschaften.

Bemerkung: Die Überlagerung $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ ist das Prinzipalbündel des Faserbündels $\xi: \tilde{X} \longrightarrow X$ (vgl. 3.3). Sie ist die "maximale" Überlagerung von X mit der gleichen Monodromiegruppe wie $\xi: \tilde{X} \longrightarrow X$.

3.3. In [23, 14.3] wird bewiesen:

Satz. Eine Überlagerung $\xi\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ ist ein Faserbündel über X mit diskreter Faser $F_o = \xi^{-1}(x_o)$, $x_o \in X$ fest, und der Monodromiegruppe G als Strukturgruppe.

Dabei werden bezüglich einer Überdeckung $\{V_j\}$ von X mit wegzusammenhängenden und einfach zusammenhängenden Koordinatenumgebungen V_j die Koordinatenfunktionen $\Phi_j\colon V_j \times F_o \longrightarrow \xi^{-1}(V_j)$ folgendermassen definiert: Für jedes j sei $x_j \in V_j$ ein fester Punkt und $C_j[x_j,x_o]$ ein fester Weg von x_j nach x_o. Jeder Punkt $x \in V_j$ wird durch einen ganz in V_j liegenden Weg $D_j[x,x_j]$ mit x_j verbunden. Für $\tilde{x}_o \in F_o$ definiert man $\Phi_j(x,\tilde{x}_o)$ als Endpunkt des nach $\tilde{X}$ hochgehobenen Weges $(D_jC_j[x,x_o])^{-1}$ mit dem Anfangspunkt $\tilde{x}_o$. Aus dieser Konstruktion folgt sofort, dass $g_{ji}(x) = \chi(C_j^{-1}D_j^{-1}D_iC_i)$, wenn $\chi\colon \Pi(X,x_o) \longrightarrow G = \Pi(X,x_o)/\Gamma$ die natürliche Abbildung bezeichnet. Die Abbildung $\xi_j\colon \xi^{-1}(V_j) \longrightarrow F_o$ (vgl. 3.1) erhält man durch Hochheben der Wege D_jC_j nach $\tilde{X}$.

3.4. Seien $B = (B,\pi,X,F)$ und $B' = (B',\pi',X',F)$ Faserungen mit der gleichen Faser.

Eine stetige Abbildung $\omega: B \longrightarrow B'$ heisst fasertreu, falls es für jeden Punkt $x \in X$ einen Punkt $x' \in X'$ gibt, sodass $\omega(F_x) = F_{x'}$ und $\omega_x = \omega|F_x: F_x \longrightarrow F_{x'}$ eine topologische Abbildung ist.

Sei $\bar{\omega}: X \longrightarrow X'$ mit $\bar{\omega}(x) = x'$ die so auf X induzierte stetige Abbildung. Dann hat man ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\omega} & B' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ X & \xrightarrow{\bar{\omega}} & X'. \end{array}$$

Seien nun $B = (B,\pi,X,F,G)$ und $B' = (B',\pi',X',F,G)$ Faserbündel mit der gleichen Faser und Strukturgruppe. Eine Bündelabbildung $\Omega: B \longrightarrow B'$ ist eine fasertreue Abbildung $\omega: B \longrightarrow B'$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Für $x \in V_j \cap \bar{\omega}^{-1}(V'_k)$ und $x' = \bar{\omega}(x)$ stimmt der Homöomorphismus $\bar{g}_{kj}(x) = \Phi'^{-1}_{k,x'} \cdot \omega_x \cdot \Phi_{j,x}$ von F mit der Operation eines Elementes von G überein und

ii) die so erhaltene Abbildung $\bar{g}_{kj}: V_j \cap \bar{\omega}^{-1}(V'_k) \longrightarrow G$ ist stetig.

Lemma. Ist $\Omega: B \longrightarrow B'$ eine Bündelabbildung derart, dass die induzierte Abbildung $\bar{\omega}: X \longrightarrow X'$ topologisch ist, so gibt es zu Ω eine inverse Bündelabbildung $\Omega^{-1}: B' \longrightarrow B$.

Zum Beweis vgl. [23, 2.7].

3.5. Sei $B = (B,\pi,X,F,G)$ ein Faserbündel und $\bar{B} = (\bar{B},\bar{\pi},X,G,G)$ das zu B assoziierte Prinzipalbündel. Dann gibt es eine Prinzipalabbildung $\Psi: \bar{B} \times F \longrightarrow B$ des Produktbündels $\bar{B} \times F = (\bar{B} \times F,\varphi,\bar{B},F,G)$, das man auch als Faserbündel mit der Strukturgruppe G betrachten kann, auf B. Sie ist folgendermassen definiert:

Ist $\bar{b} \in \bar{B}$, $f \in F$ und $x = \bar{\pi}(\bar{b}) \in V_j$, so ist

$$\Psi(\bar{b},f) = \Phi_j(x,\bar{\pi}_j(\bar{b})f).$$

Die so definierte Abbildung ist eine Bündelabbildung und das Diagramm

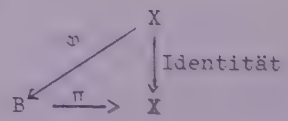
$$\begin{array}{ccc} \bar{B} \times F & \xrightarrow{\varphi} & \bar{B} \\ \downarrow{\scriptstyle \Psi} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\pi}} \\ B & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

kommutiert (vgl. dazu [23, § 8]).

Lemma. Sei $B = (B,\pi,X,F,G)$ ein Faserbündel derart, dass das Prinzipalbündel $\overline{B} = (\overline{B},\overline{\pi},X,G,G)$ eine Überlagerung von X ist*). Dann ist die Prinzipalabbildung $\psi: \overline{B} \times F \longrightarrow B$ eine Überlagerung, deren Blätterzahl b gleich der (endlichen oder unendlichen) Ordnung von G ist.

Beweis: Sei $\{V_j\}$ eine genügend feine Überdeckung von X, sodass $\overline{V}_j = \overline{\pi}^{-1}(V_j)$ in b Zusammenhangskomponenten $\overline{V}_j^i$, $i = 1,\ldots,b$, zerfällt. Es genügt, die Abbildung $\psi_j: \overline{V}_j \times F \longrightarrow V_j \times F$ zu betrachten, die gegeben ist durch $\psi_j(\overline{b},f) = (\overline{\pi}(\overline{b}),\overline{\tau}_j(\overline{b})f)$. Da die Abbildung $\overline{\tau}_j: \overline{V}_j \longrightarrow G$ auf $\overline{V}_j^i$ konstant ist, ist die Abbildung $\psi_j|\overline{V}_j^i \times F: \overline{V}_j^i \times F \longrightarrow V_j \times F$ topologisch und Lemma 3.5 ist bewiesen.

3.6. Sei $B = (B,\pi,X,F)$ eine Faserung. Ein Schnitt von B ist eine stetige Abbildung $\sigma: X \longrightarrow B$, sodass das Diagramm



kommutiert.

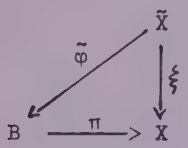
---

*) Nach [23, 14.6] ist diese Voraussetzung genau dann erfüllt, wenn G diskret und $\overline{B}$ wegzusammenhängend ist.

Ist $\varphi: X \longrightarrow B$ ein Schnitt, dann ist mit $S = \varphi(X)$ die Abbildung $\pi|S: S \longrightarrow X$ topologisch*).

Eine Teilmenge $S \subset B$ heisst Schnittfläche von B, falls es einen Schnitt $\varphi: X \longrightarrow B$ gibt, sodass $S = \varphi(X)$.

Sei nun $\xi: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine Überlagerung. Ein Quasischnitt von B ist eine topologische Abbildung*) $\tilde{\varphi}: \tilde{X} \longrightarrow \tilde{S} \subset B$, sodass das Diagramm



kommutiert.

Es folgt, dass die Mengen $F_x \cap \tilde{S}$, $x \in X$, diskret sind und $\pi|\tilde{S}: \tilde{S} \longrightarrow X$ eine zu $\xi: \tilde{X} \longrightarrow X$ äquivalente Überlagerung ist.

Eine Teilmenge $\tilde{S} \subset B$ heisst Quasischnittfläche von B, falls es einen Quasischnitt $\tilde{\varphi}: \tilde{X} \longrightarrow B$ gibt, sodass $\tilde{S} = \tilde{\varphi}(\tilde{X})$. Zwei Quasischnitte $\tilde{\varphi}: \tilde{X} \longrightarrow B$ und $\tilde{\varphi}': \tilde{X}' \longrightarrow B$ werden als gleich betrachtet, falls $\tilde{\varphi}(\tilde{X}) = \tilde{\varphi}'(\tilde{X}')$.

---

*) Teilräume seien stets mit der Relativtopologie versehen.

Ein Quasischnitt ist genau dann ein Schnitt, wenn $\xi: \tilde{X} \longrightarrow X$ eine topologische Abbildung ist.

3.7. In 2.1 werden Zerlegungen beliebiger topologischer Räume betrachtet. Für Faserungen sind sogenannte "quasitransversale" Zerlegungen von Bedeutung.

Sei $B = (B,\pi,X,F)$ eine Faserung. Eine Zerlegung Σ von B mit den Elementen $\tilde{S}_i$, $i \in I$, heisst quasitransversale Zerlegung von B, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung $V = V(x)$ und eine topologische Abbildung $\Theta: V \times F \longrightarrow \pi^{-1}(V)$ gibt, sodass die Mengen $\Theta(V \times f)$, $f \in F$, mit den Zusammenhangskomponenten von $\tilde{S}_i \cap \pi^{-1}(V)$, $i \in I$, übereinstimmen.

Daraus folgt sofort, dass die Elemente $\tilde{S}_i$, $i \in I$, einer quasitransversalen Zerlegung Σ von B Quasischnittflächen von B sind.

Eine quasitransversale Zerlegung eines Faserbündels sei eine quasitransversale Zerlegung der zugrundeliegenden Faserung.

Eine quasitransversale Zerlegung Σ von B heisst transversale Zerlegung, falls alle Elemente $\tilde{S}_i$ von Σ Schnittflächen von B sind.

Jede Produktfaserung über X mit dem Faserraum $B = X \times F$ gestattet eine transversale Zerlegung in Schnittflächen $X \times f$, $f \in F$.

3.8. Eine quasitransversale Zerlegung Σ einer Faserung $\mathcal{F} = (B,\pi,X,F)$ mit den Elementen $\tilde{S}_i$, $i \in I$, induziert in jeder Faser $F_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in X$, eine Zerlegung σ_x, deren Elemente die diskreten Mengen $\tilde{S}_i \cap F_x$, $i \in I$, sind. Sei $\sigma_x : F_x \longrightarrow \overline{F}_x = F_x/\sigma_x$ die natürliche Abbildung auf den mit der Quotiententopologie versehenen Raum $\overline{F}_x$.

Sind $x,x' \in X$ und ist $C[x,x']$ ein Weg von x nach x', so wird durch Σ eine Translation $C^{\#} : F_x \longrightarrow F_{x'}$ der Faser entlang C gegeben, die wie folgt definiert ist:

Ist $f \in F_x$, $\tilde{S}$ das durch f gehende Element von Σ und $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{S}$ der zugehörige Quasischnitt, so erhält man einen Punkt $\tilde{x} = \tilde{\varphi}^{-1}(f)$. Der Weg C wird hochgehoben nach $\tilde{X}$ zu einem Weg $\tilde{C}[\tilde{x},\tilde{x}']$ mit dem Anfangspunkt $\tilde{x}$ und dem eindeutig bestimmten Endpunkt $\tilde{x}'$ und man definiert $C^{\#}(f) = \tilde{\varphi}(\tilde{x}') \in F_{x'}$.

Aus Bedingung ii) in 3.7 folgt sofort, dass für je zwei Punkte $x,x' \in X$ und jeden Weg $C[x,x']$ die Translation $C^{\#} : F_x \longrightarrow F_{x'}$ eine topologische Abbildung ist. Da $C^{\#}$ ausserdem die Äquivalenzklassen von F_x nach σ_x bzw. $F_{x'}$ nach $\sigma_{x'}$ aufeinander abbildet, hat

man eine topologische Abbildung $\overline{c}^{\#}: \overline{F}_x \longrightarrow \overline{F}_{x'}$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_x & \xrightarrow{c^{\#}} & F_{x'} \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_x} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_{x'}} \\ \overline{F}_x & \xrightarrow{\overline{c}^{\#}} & \overline{F}_{x'} \end{array} .$$

Zu jeder quasitransversalen Zerlegung Σ von B gehört also ein bis auf Homöomorphismen eindeutig bestimmter Quotientenraum $\overline{F}$ der Faser F mit einer stetigen Abbildung $\sigma: F \longrightarrow \overline{F}$.

3.9. Satz. Sei $B = (B,\pi,X,F,G)$ ein Faserbündel derart, dass das Prinzipalbündel $\overline{B} = (\overline{B},\overline{\pi},X,G,G)$ eine Überlagerung von X ist. Dann gestattet B eine quasitransversale Zerlegung Σ.

Beweis: Sei $\psi: \overline{B} \times F \longrightarrow B$ die in 3.5 definierte Prinzipalabbildung. Eine Überdeckung von B ist gegeben durch die Mengen $\tilde{S}_f = \psi(\overline{B} \times f)$, $f \in F$. Nach einer einfachen Rechnung sieht man, dass $\psi(\overline{B} \times f_1) = \psi(\overline{B} \times f_2)$ genau dann, wenn es ein $g \in G$ gibt, sodass $f_2 = gf_1$, und dass zwei verschiedene Mengen $\tilde{S}_f$ einen leeren Durchschnitt haben. Ist $x \in X$, $V = V(x)$ eine geeignete Umgebung von x und $\overline{U}$ eine Zusammenhangskomponente von $\psi^{-1}(\pi^{-1}(V))$, so ist $\Theta = \psi|\overline{U}: \overline{U} \longrightarrow \pi^{-1}(V)$ eine Abbildung mit den verlangten Eigenschaften.

3.10. Seien $B = (B,\pi,X,F)$ und $B' = (B',\pi',X,F)$ Faserungen.

B und B' heissen topologisch äquivalent, falls es eine topologische fasertreue Abbildung (vgl. 3.4) $\omega: B \longrightarrow B'$ gibt derart, dass $\bar{\omega}: X \longrightarrow X$ die identische Abbildung ist.

Man sagt, die Faserung $B = (B,\pi,X,F)$ lässt sich mit einer Strukturgruppe G versehen, falls es ein Faserbündel $B' = (B',\pi',X,F,G)$ gibt, sodass die Faserungen (B,π,X,F) und (B',π',X,F) topologisch äquivalent sind.

Seien nun $B = (B,\pi,X,F,G)$ und $B' = (B',\pi',X,F,G)$ Faserbündel.

B und B' heissen G-äquivalent, falls es eine Bündelabbildung $\Omega: B \longrightarrow B'$ gibt derart, dass $\bar{\omega}: X \longrightarrow X$ die identische Abbildung ist (vgl. 3.4).

Seien G und G' topologische Untergruppen*) der topologischen Gruppe K. Dann heissen die Faserbündel (B,π,X,F,G) und (B',π',X,F,G') K-äquivalent, falls die Faserbündel (B,π,X,F,K) und (B',π',X,F,K) K-äquivalent sind (vgl. [23, 4.2]).

In einer Gruppe G von Homöomorphismen eines topo-

*) Eine derartige Bedingung ist nötig, um die Stetigkeit der Abbildungen g_{ji} bzw. g'_{ji} (vgl. 3.1) in die grössere Gruppe K zu sichern.

logischen Raumes F lässt sich die C - O Topologie einführen (vgl. [8]). Sei $C \subset F$ eine kompakte und $O \subset F$ eine offene Teilmenge und sei $W(C,O) = \{g \in G \mid gC \subset O\}$. Bildet man nun noch endliche Durchschnitte der Mengen $W(C,O)$, so erhält man eine Basis für die C-O Topologie von G.

Sei H(F) die Gruppe aller Homöomorphismen von F, versehen mit der C-O Topologie. Ist F kompakt, so ist H(F) eine topologische Transformationsgruppe von F (vgl. [23, 5.4]).

Lemma. Seien G, G' topologische Untergruppen von H(F) und $\mathcal{B} = (B,\pi,X,F,G)$, $\mathcal{B}' = (B',\pi',X,F,G')$ zwei Faserbündel, sodass (B,π,X,F) und (B',π',X,F) topologisch äquivalent sind. Dann sind $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ H(F)-äquivalent.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass die gegebene fasertreue Abbildung $\omega: B \longrightarrow B'$ eine Bündelabbildung ist, d.h. die Abbildung $\bar{g}_{kj}: V_j \cap V'_k \longrightarrow H(F)$ mit $\bar{g}_{kj}(x) = \phi'^{-1}_{k,x} \omega_x \phi_{j,x}$ stetig ist. Der Beweis davon verläuft analog zu [23, 5.4]. Sei $C \subset F$ kompakt, $O \subset F$ offen, $V = V_j \cap V'_k$, $x_o \in V$ und $\bar{g}_{kj}(x_o) \in W(C,O)$. Die Menge $Z = \phi'^{-1}_k \circ \omega \circ \phi_j (V \times O) \subset V_j \times F$ ist offen und für $c \in C$ ist $(x_o,c) \in Z$. Daher ist $x_o \times C \subset Z$ und es gibt wegen der Kompaktheit von $x_o \times C$ eine Umgebung $U = U(x_o) \subset V$ sodass $U \times C \subset Z$. Es

folgt, dass für $x \in U$ $\bar{g}_{kj}(x)\, C \subset O$, d.h. $\bar{g}_{kj}(x) \in W(C,O)$ und die Stetigkeit von $\bar{g}_{kj}$ im Punkte x_o ist bewiesen.

3.11. Satz. Eine Faserung (B,π,X,F) die eine transversale Zerlegung Σ gestattet (vgl. 3.7) ist zur Produktfaserung $(X \times F,\pi',X,F)$ topologisch äquivalent.

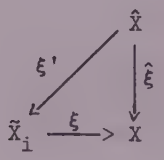
Beweis: Sei $x_o \in X$, $F_o = \pi^{-1}(x_o)$, $b \in B$ und S_i die durch b gehende Schnittfläche von Σ. Setzt man $\psi(b) = S_i \cap F_o$, so erhält man eine stetige Abbildung $\psi: B \longrightarrow F_o$ und mit $\omega(b) = (\pi(b),\psi(b))$ eine Abbildung $\omega: B \longrightarrow X \times F_o$. Aus dieser Konstruktion und Definition 3.7 folgt sofort, dass ω topologisch und fasertreu ist.

Durch Anwendung von Lemma 3.10 erhält man das

Korollar. Ist $B = (B,\pi,X,F,G)$ ein Faserbündel mit einer topologischen Untergruppe $G \subset H(F)$ als Strukturgruppe und gestattet B eine transversale Zerlegung, so ist B zum Produktbündel $(B \times F,\pi',X,F,e)$ $H(F)$ - äquivalent.

3.12. Um ein ähnliches Resultat wie Satz 3.11 auch für Faserungen zu erhalten, die eine quasitransversale Zerlegung gestatten, benötigt man den Begriff der "Majorante" einer quasitransversalen Zerlegung.

Sei Σ eine quasitransversale Zerlegung der Faserung $B = (B,\pi,X,F)$. Eine Überlagerung $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ der Basis X heisse Majorante von Σ, falls für jede Überlagerung $\xi_i: \tilde{X}_i \longrightarrow X$ der quasitransversalen Zerlegung Σ eine Überlagerung $\xi': \hat{X} \longrightarrow \tilde{X}_i$ existiert, sodass das Diagramm



kommutiert.

Eine Majorante $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ heisst normal, falls die Überlagerung normal ist (vgl. 3.2).

Die universelle Überlagerung von X ist eine normale Majorante von jeder quasitransversalen Zerlegung einer Faserung mit X als Basis.

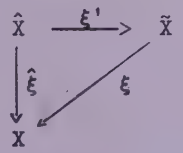
3.13. Satz. Sei $B = (B,\pi,X,F)$ eine Faserung, die eine quasitransversale Zerlegung Σ gestattet und sei $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ eine Majorante von Σ mit der Monodromiegruppe $\hat{G}$. Dann gilt:

i) B lässt sich mit der Strukturgruppe $\hat{G}$ versehen.

ii) Ist $B = (B,\pi,X,F,G)$ ein Faserbündel mit einer topologischen Untergruppe $G \subset H(F)$ als Strukturgruppe, so gibt es ein Faserbündel $\hat{B} = (\hat{B},\hat{\pi},X,F,\hat{G})$ sodass B und $\hat{B}$ $H(F)$-äquivalent sind.

Beweis: Auf Grund von Lemma 3.2 kann man ohne Änderung der Monodromiegruppe $\hat{G}$ zu einer normalen Majorante $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ übergehen, d.h. $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ wird ein Prinzipalbündel mit der diskreten Strukturgruppe $\hat{G}$. Die Existenz eines Faserbündels $\hat{B} = (\hat{B}, \hat{\pi}, X, F, \hat{G})$ mit $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ als assoziiertem Prinzipalbündel folgt aus einem allgemeinen Existenzsatz für Faserbündel (vgl. [23, 3.2]), wenn nur $\hat{G}$ zu einer Transformationsgruppe von F gemacht wird. Da $\hat{G}$ diskret ist, genügt es dazu, eine Operation von $\hat{G}$ auf F oder auch bei fest gewähltem $x_o \in X$ auf $F_o = \pi^{-1}(x_o)$ zu definieren: Sei $\Gamma \subset \Pi(X, x_o)$ der zur Überlagerung $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ gehörende Normalteiler der Fundamentalgruppe von X in x_o. Jedem Element $g \in \hat{G} = \Pi(X, x_o)/\Gamma$ entspricht eine Klasse γ geschlossener Wege um x_o. Der Homöomorphismus $g: F_o \longrightarrow F_o$ sei definiert als Translation von F_o entlang eines Weges $C \in \gamma$.

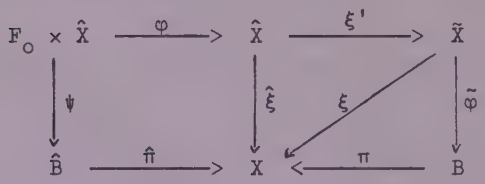
Da auch die Operation von g auf $\hat{\xi}^{-1}(x_o)$ durch Translation entlang C definiert und unabhängig von $C \in \gamma$ ist, und es für jeden Quasischnitt $\tilde{\varphi}: \tilde{X} \longrightarrow B$ mit der Überlagerung $\xi: \tilde{X} \longrightarrow X$ ein kommutatives Diagramm



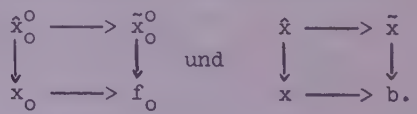
gibt, ist auch die Operation von g auf F_o unabhängig von $C \in \gamma$.

Bemerkung: $\hat{G}$ operiert im allgemeinen nicht effektiv auf F_o. Will man das erreichen, so kann man zu einer Faktorgruppe von $\hat{G}$ übergehen. Diese Faktorgruppe ist die Monodromiegruppe einer "minimalen" Majorante von Σ.

Zum Beweis der topologischen Äquivalenz der Faserungen (B,π,X,F) und $(\hat{B},\hat{\pi},X,F_o)$ ist eine fasertreue Abbildung $\omega: B \longrightarrow \hat{B}$ gemäss 3.10 zu konstruieren. Ist $b \in B$ und $\tilde{\varphi}: \tilde{X} \longrightarrow B$ der Quasischnitt von Σ mit $b \in \tilde{\varphi}(\tilde{X})$, so hat man das folgende kommutative Diagramm:



Dabei bezeichnet $\psi: F_o \times \hat{X} \longrightarrow \hat{B}$ die in 3.5 definierte Prinzipalabbildung und $\varphi: F_o \times \hat{X} \longrightarrow \hat{X}$ die Projektion. Neben $x_o \in X$ wählt man einen weiteren festen Punkt $\hat{x}_o^o \in \hat{\xi}^{-1}(x_o)$. Es bezeichne $x = \pi(b)$, $\tilde{x} = \tilde{\varphi}^{-1}(b)$, $\tilde{x}_o^o = \xi'(\hat{x}_o^o)$ und $f_o = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_o^o)$; $\hat{x} \in \xi'^{-1}(\tilde{x})$ sei beliebig gewählt. Das ergibt die Diagramme:



Mit diesen Bezeichnungen definiert man $\omega(b) = \psi(\hat{x},f_o)$.

Es ist zunächst zu zeigen, dass diese Definition

unabhängig von der Auswahl von $\hat{x} \in \xi'^{-1}(\tilde{x})$ ist. Wenn $x \in V_j$, so ist $\omega(b) = \hat{\Phi}_j(x, \hat{\xi}_j(\hat{x}) \cdot f_o)$, wobei $\hat{\Phi}_j$: $V_j \times F_o \longrightarrow \hat{\pi}^{-1}(V_j)$ die Koordinatenfunktion von $\hat{B}$ und $\hat{\xi}_j$: $\hat{\xi}^{-1}(V_j) \longrightarrow \hat{\xi}^{-1}(x_o)$ die in 3.3. definierte Translation bezeichnet. Da $\hat{\xi}$: $\hat{X} \longrightarrow X$ eine normale Überlagerung ist, gibt es eine eineindeutige Abbildung von $\hat{\xi}^{-1}(x_o) = \{\hat{x}_o^o, \hat{x}_o^1, \ldots, \hat{x}_o^\lambda, \ldots\}$ auf $\hat{G} = \{g^o, g^1, \ldots, g^\lambda, \ldots\}$. Die Indizierung kann so gewählt werden, dass die Operation von $\hat{G}$ auf $\hat{\xi}^{-1}(x_o)$ gegeben ist durch $g^\lambda \cdot \hat{x}_o^o = \hat{x}_o^\lambda$. Nach Definition der Operation von $\hat{G}$ auf F_o ist $g^\lambda \cdot f_o = \tilde{\varphi}(\xi'(g^\lambda \cdot \hat{x}_o^o)) = \tilde{\varphi}(\xi'(\hat{x}_o^\lambda))$, d.h. $g^\lambda \cdot f_o = g^\mu \cdot f_o$ genau dann, wenn $\xi'(\hat{x}_o^\lambda) = \xi'(\hat{x}_o^\mu)$ *). Ist $\hat{x}^*$ ein anderer Punkt aus $\xi'^{-1}(\tilde{x})$, so ist, da $\hat{\xi}_j$ nur eine Translation bewirkt, $\xi'(\hat{\xi}_j(\hat{x})) = \xi'(\hat{\xi}_j(\hat{x}^*))$ und daher $\hat{\xi}_j(\hat{x}) \cdot f_o = \hat{\xi}_j(\hat{x}^*) \cdot f_o$, womit die behauptete Unabhängigkeit bewiesen ist.

Ausserdem ist ω umkehrbar. Falls nämlich $\hat{b} = \hat{\Phi}_j(x, g^\lambda \cdot f) = \hat{\Phi}_j(x, g^\mu \cdot f^*) \in \hat{B}$ für $f, f^* \in F_o$ und $g^\lambda, g^\mu \in \hat{G}$, so folgt aus $g^\lambda \cdot f = g^\mu \cdot f^*$, dass f und f^* der gleichen Quasischnittfläche angehören und daraus, dass $f = f^* = f_o$. Daher ist $\xi'(\hat{x}_o^\lambda) = \xi'(\hat{x}_o^\mu)$. Sei $\xi'(\hat{x}_o^\lambda)$ Endpunkt und $\tilde{x}$ Anfangspunkt des nach $\tilde{X}$ hochgehobenen Weges $D_j C_j[x, x_o]$, so ist $\omega^{-1}(\hat{b}) = \tilde{\varphi}(\tilde{x})$.

Offensichtlich ist ω surjektiv und die Stetigkeit von ω und ω^{-1} folgt sofort aus der Definition der quasi-

*) Nur an dieser Stelle wird wesentlich benutzt, dass die Überlagerung $\hat{\xi}$: $\hat{X} \longrightarrow X$ normal ist.

transversalen Zerlegung (vgl. 3.7). Damit ist Behauptung i) und mit Hilfe von Lemma 3.10 auch Behauptung ii) bewiesen.

Durch Anwendung von Satz 3.9 erhält man eine quasitransversale Zerlegung $\hat{\Sigma}$ der Faserung $\hat{B}$ und aus der Definition der Abbildung $\omega: B \longrightarrow \hat{B}$ sieht man, dass die Elemente von Σ durch ω auf die Elemente von $\hat{\Sigma}$ abgebildet werden. Setzt man $F_o = F$ und $\chi = \omega^{-1} \cdot \psi$, so ergibt sich:

3.14. Korollar. Sei $B = (B,\pi,X,F)$ eine Faserung die eine quasitransversale Zerlegung Σ gestattet. Zu jeder normalen Majorante $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ von Σ gibt es eine fasertreue Abbildung $\chi: \hat{X} \times F \longrightarrow B$ mit folgenden Eigenschaften:

i) $\chi: \hat{X} \times F \longrightarrow B$ ist eine Überlagerung.

ii) Für jeden Quasischnitt $\tilde{\varphi}: \tilde{X} \longrightarrow \tilde{S} \subset B$ von Σ besteht $\chi^{-1}(\tilde{S})$ aus den paarweise verschiedenen Schnittflächen $\hat{X} \times f^{\gamma}$, $\gamma = 1,\ldots,c$, des Produktraumes $\hat{X} \times F$, wobei c die Blätterzahl der Überlagerung $\xi': \hat{X} \longrightarrow \tilde{X}$ (vgl. 3.12) bezeichnet.

3.15. Ein SEIFERTscher Faserraum ist nach [12] wie folgt definiert:

Seien F und $\hat{X}$ topologische Räume und sei G eine diskrete Gruppe, die auf F und $\hat{X}$ operiert. Definiert man durch $g\cdot(f,\hat{x}) = (g\cdot f, g\cdot\hat{x})$ $(g \in G,\ f \in F,\ \hat{x} \in \hat{X})$ eine Operation von G auf $F \times \hat{X}$, so sind die Räume $B = (F \times \hat{X})/G$ und $\overline{F} = F/G$ definiert. Bezeichnen $\hat{\tau}: F \times \hat{X} \longrightarrow F$ die natürliche Projektion und $\chi: F \times \hat{X} \longrightarrow B$ bzw. $\sigma: F \longrightarrow \overline{F}$ die natürlichen Abbildungen auf die Quotientenräume, so gibt es eine Abbildung $\tau: B \longrightarrow \overline{F}$, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} \times F & \xrightarrow{\hat{\tau}} & F \\ \downarrow{\scriptstyle \chi} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ B & \xrightarrow{\tau} & \overline{F} \end{array}$$

kommutiert. Jedes Tripel $(B,\tau,\overline{F})$, das sich auf diese Weise darstellen lässt, heisst SEIFERTsches Produkt über $\overline{F}$. Es ist im allgemeinen kein direktes Produkt.

Seien R und Y topologische Räume und sei $\tau: R \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Das Tripel (R,τ,Y) heisst SEIFERTscher Faserraum über Y, falls es zu jedem Punkt $y_o \in Y$ eine Umgebung $Z = Z(y_o)$ gibt, sodass für $T = \tau^{-1}(Z)$ und $\tau' = \tau|T$ das Tripel (T,τ',Z) ein SEIFERTsches Produkt ist.

Entsprechend heisst ein SEIFERTscher Faserraum differenzierbar, wenn in obiger Definition alle auftretenden topologischen Räume differenzierbare Mannigfaltigkeiten und alle stetigen Abbildungen differenzierbar sind.

Ist $B = (B,\pi,X,F)$ eine Faserung, die eine transversale Zerlegung Σ gestattet, so kann man nach Satz 3.11 $B = X \times F$ setzen und B ist dann auch Faserraum der trivialen Faserung (B,φ,F,X), wobei $\varphi: B \longrightarrow F$ die natürliche Projektion bezeichnet. Für den Fall, dass Σ nur eine quasitransversale Zerlegung ist, gilt der

Satz. Eine Faserung $B = (B,\pi,X,F)$ die eine quasitransversale Zerlegung Σ gestattet, definiert ein SEIFERTsches Produkt $(B,\tau,\overline{F})$ über $\overline{F} = F/\sigma$ (vgl. 3.8).

Beweis: Sei $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$ eine normale Majorante von Σ mit der Monodromiegruppe G. Die Operation von G auf F ist so definiert (vgl. 3.13), dass F/G und F/σ mit der Quotiententopologie versehen homöomorph sind, d.h. man kann die Abbildung $\sigma: F \longrightarrow \overline{F}$ als Quotientenabbildung von F auf F/G auffassen. Eine Operation von G auf $\hat{X}$ ist wohldefiniert durch $g\cdot\hat{x} = \hat{\xi}_j^{-1}(\hat{\xi}_j(\hat{x})\cdot g^{-1}) \cap \hat{\xi}^{-1}(x)$, wenn $x = \hat{\xi}(\hat{x}) \in V_j$; dabei bezeichnet $\hat{\xi}_j: \hat{\xi}^{-1}(V_j) \longrightarrow G$ die in 3.3 definierte Translation. In der Terminologie von [22] bewirkt g eine Deckbewegung in

der normalen Überlagerung $\hat{\xi}: \hat{X} \longrightarrow X$, deren Monodromiegruppe isomorph zur Gruppe der Deckbewegungen ist.

Nach Korollar 3.14 hat man eine Überlagerungsabbildung $\chi: \hat{X} \times F \longrightarrow B$. Es genügt daher, noch zu beweisen, dass χ die natürliche Abbildung auf den Quotientenraum $(\hat{X} \times F)/G$ beschreibt, d.h. dass es für $\hat{x},\hat{x}' \in \hat{X}$ und $f,f' \in F$ genau dann ein $g \in G$ mit $(\hat{x}',f') = g\cdot(\hat{x},f)$ gibt, wenn $\chi(\hat{x},f) = \chi(\hat{x}',f')$. Sei $(\hat{x}',f') = g\cdot(\hat{x},f)$ und $x = \hat{\xi}(\hat{x}) = \hat{\xi}(\hat{x}') \in V_j$. Dann ist mit den Bezeichnungen des Beweises von Satz 3.13 $\chi(\hat{x}',f') = \omega^{-1}(\hat{\varphi}_j(x,\hat{\xi}_j(\hat{x}')\cdot f')) = \omega^{-1}(\hat{\varphi}_j(x,\hat{\xi}_j(\hat{x})\cdot f)) = \chi(\hat{x},f)$. Ist umgekehrt $\chi(\hat{x},f) = \chi(\hat{x}',f')$, so ist $\hat{\xi}_j(\hat{x}')\cdot f' = \hat{\xi}_j(\hat{x})\cdot f$. Definiert man $g^* = (\hat{\xi}_j(\hat{x}'))^{-1}\cdot\hat{\xi}_j(\hat{x})$, so gilt $g^*\cdot(\hat{x},f) = (\hat{x}',f')$.

§ 4. QUASIREGULÄRE HOLOMORPHE ABBILDUNGEN.

In diesem Paragraphen bezeichnen X und Y stets zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Topologie.

4.1. Eine surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \longrightarrow Y$ heisst regulär im Punkte $x \in X$, falls der Matrixrang (vgl. 1.7) $\rho(x) = \dim Y$ *).

$\tau: X \longrightarrow Y$ heisst regulär, falls τ in allen Punkten $x \in X$ regulär ist.

Die Singularitätenmenge und damit nach 1.6 auch die Entartungsmenge einer regulären holomorphen Abbildung sind also leer.

4.2. Eine surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \longrightarrow Y$ heisst quasiregulär im Punkte $x \in X$, falls es eine Umgebung $U = U(x)$ und eine reguläre holomorphe Abbildung $p: U \longrightarrow \mathbb{C}^m$ gibt, deren Fasern die Niveaumengen von $\tau|U$ sind, d.h. $\overline{p} = (\overline{\tau|U})_e$ (vgl. 2.4).

m ist dabei unabhängig von x, da es stets gleich der Dimension von Y sein muss.

$\tau: X \longrightarrow Y$ heisst quasiregulär, falls τ in allen Punkten $x \in X$ quasiregulär ist.

---

*) Wir interessieren uns nur für den Fall $n \geq m$.

Dabei ist zu beachten, dass die Niveaumengen der Beschränkung von τ auf U nicht gleich dem Durchschnitt der Niveaumengen von τ mit U zu sein brauchen.

4.3. Für eine quasireguläre holomorphe Abbildung ist die Entartungsmenge, jedoch nicht notwendigerweise die Singularitätenmenge leer. Es gilt das

Lemma. Die Fasern einer quasiregulären holomorphen Abbildung $\tau: X \longrightarrow Y$ sind gleichdimensionale komplexe Untermannigfaltigkeiten von X.

Der Beweis ergibt sich sofort durch Anwendung des Satzes über implizite Funktionen: Sei $x_o \in X$ und $p: U(x_o) \longrightarrow \mathbb{C}^m$ die nach 4.2 gegebene Abbildung. Zwischen Koordinatenumgebungen $U'(x_o) \subset U$ und $Z'(p(x_o)) \subset \mathbb{C}^m$ mit Koordinaten $(v_1,\ldots,v_n)$ bzw. $(z_1,\ldots,z_m)$ wird die Abbildung $p' = p|U': U' \longrightarrow \mathbb{C}^m$ beschrieben durch in U' holomorphe Funktionen $z_i = p_i(v_1,\ldots,v_n)$, $i = 1,\ldots,m$, und der Rang der Funktionalmatrix

$$\left(\frac{\partial(p_1,\ldots,p_m)}{\partial(v_1,\ldots,v_n)}\right)$$

im Punkte x_o ist gleich m. Daher lässt sich eine Koordinatentransformation $(v_1,\ldots,v_n) \longrightarrow (w_1,\ldots,w_n)$ durchführen, sodass $p'(w_1,\ldots,w_n) = (w_1,\ldots,w_m)$. Also ist die Faser eines Punktes $z = (\xi_1,\ldots,\xi_m) \in p(U')$

bezüglich p' in U' die (n - m)-dimensionale analytische Ebene $F = \{(w_1,\dots,w_n) \subset U' \mid w_1 = \xi_1,\dots,w_m = \xi_m\}$.

4.4. Lemma. Sei $\tau: X \longrightarrow Y$ eine surjektive holomorphe Abbildung, $E \subset X$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit mit $\tau(E) = Y$ und $\tau' = \tau|E$. Ist τ' in einem Punkt $x_o \in E$ regulär, so ist auch τ in x_o regulär.

Beweis: In einer Umgebung $U(x_o)$ wählt man Koordinaten $(v_1,\dots,v_n)$ sodass E in U beschrieben wird durch die Gleichungen $v_{r+1} = 0,\dots,v_n = 0$. Da $\tau(E) = Y$, ist $r \geq m = \dim Y$. Bezeichnen $(z_1,\dots,z_m)$ Koordinaten um $\tau(x_o)$, so wird τ beschrieben durch in U holomorphe Funktionen $z_i = f_i(v_1,\dots,v_n)$ und τ' durch $z_i = f_i'(v_1,\dots,v_r)$ wobei $f_i'(v_1,\dots,v_r) = f_i(v_1,\dots,v_r,0,\dots,0)$. Da τ' in x_o regulär ist, kann man durch geeignete Indizierung erreichen, dass

$$\left|\frac{\partial(f_1',\dots,f_m')}{\partial(v_1,\dots,v_m)}\right|_{x_o} \neq 0.$$

Da $\frac{\partial f_i'}{\partial v_j}|x_o = \frac{\partial f_i}{\partial v_j}|x_o$, $i,j = 1,\dots,m$, hat auch die Funktionalmatrix von τ in x_o den Rang m.

4.5. Satz. Sei $\tau: X \longrightarrow Y$ eine kompakte reguläre holomorphe Abbildung und $X \xrightarrow{\alpha} \tilde{Y} \xrightarrow{\beta} Y$ eine STEINsche Faktorisierung von τ (vgl. 2.7). Dann ist

i) $\tilde{Y}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit,

ii) $\alpha\colon X \longrightarrow \tilde{Y}$ eine C^∞-differenzierbare Faserung mit zusammenhängender Faser und

iii) $\beta\colon \tilde{Y} \longrightarrow Y$ eine unverzweigte Überlagerung.

Beweis: Es genügt iii) zu zeigen; daraus folgt sofort i) und mit Hilfe eines Satzes von EHRESMANN über die unterliegenden C^∞-Strukturen der komplexen Mannigfaltigkeiten (vgl. [7, S.31]) auch ii).

$\tilde{Y}$ ist nach Satz 2.7 ein normaler komplexer Raum, die Menge $\tilde{N} \subset \tilde{Y}$ der nicht uniformisierbaren Punkte von $\tilde{Y}$ ist analytisch von der Codimension 2 (vgl. [5, Exp. XI]). Da $\tau = \beta \circ \alpha$ regulär ist, ist β notwendig in jedem uniformisierbaren Punkt von $\tilde{Y}$ regulär, also unverzweigt. Damit ist die Verzweigungsmenge $\tilde{V} \subset \tilde{Y}$ von β in der 2-codimensionalen Menge $\tilde{N}$ enthalten, daher folgt aus Lemma 1.15, dass $\tilde{V}$ leer ist.

4.6. Jede reguläre holomorphe Abbildung ist auch quasiregulär. Es gibt jedoch quasireguläre Abbildungen, die nicht regulär sind, zum Beispiel alle echt verzweigten Überlagerungen $\eta\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ zweier komplexer Mannigfaltigkeiten $\tilde{X}$ und X. Eine weitere Klasse von Beispielen nicht regulärer quasiregulärer holomorpher Abbildungen $\tau\colon X \longrightarrow Y$, deren Fasern sogar in X zusammenhängend sein können, wird in 5.6 betrachtet.

4.7. In Lemma 4.3 wurde bereits bemerkt, dass die Fasern einer quasiregulären holomorphen Abbildung gleichdimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten sind. Es soll nun gezeigt werden, dass die quasiregulären holomorphen Abbildungen durch diese Eigenschaft bereits vollständig charakterisiert sind. Es gilt folgender

Satz. X und Y seien komplexe Mannigfaltigkeiten und $\tau: X \longrightarrow Y$ sei eine surjektive holomorphe Abbildung, deren Fasern gleichdimensionale komplexe Untermannigfaltigkeiten von X sind. Dann ist τ quasiregulär.

Beweis: Es sei n die Dimension von X, m die Dimension von Y und $k = n - m$. Da τ surjektiv ist, ist $k \geq 0$. Sei $x_0 \in X$ ein fest gewählter Punkt und $y_0 = \tau(x_0) \in Y$. Man kann nun lokale Koordinaten $(v_1,\ldots,v_m,w_1,\ldots,w_k)$ um x_0 und $(z_1,\ldots,z_m)$ um y_0 so wählen, dass in einer Polyzylinderumgebung $V \times W$ von x_0 mit

$$V = \{ v \in \mathbb{C}^m \mid |v_i| < c,\ i = 1,\ldots,m \} \text{ und}$$
$$W = \{ w \in \mathbb{C}^k \mid |w_j| < d,\ j = 1,\ldots,k \}$$

die durch x_0 gehende Faser von τ in $V \times W$ beschrieben wird durch die Gleichungen $v_1 = 0,\ldots,v_m = 0$.

Die Abbildung $\tau' = \tau|V: V \longrightarrow Y$ ist holomorph und $\tau'^{-1}(y_0)$ besteht nur aus dem Punkt $x_0 \in V$.

Daher ist nach Satz 1.4 und Lemma 1.8 τ' für genügend kleines V diskret und kompakt und nach Satz 1.7 ist $Z' = \tau'(V)$ eine Umgebung von y_o. Für eine genügend kleine relativ kompakte Umgebung $Z = Z(y_o) \subset\subset Z'$ ist $E = \tau'^{-1}(Z) \subset\subset V$ und da τ' als kompakte Abbildung auch abgeschlossen ist (vgl. [3, § 10]), ist $\tau'(\partial V) \cap \overline{Z} = \emptyset$. $\sigma = \tau'|E: E \longrightarrow Z$ ist nach Satz 1.14 eine analytische Überlagerung.

4.8. Hilfssatz. Man kann W so wählen, dass $\tau^{-1}(y) \cap (\partial V \times W) = \emptyset$ für alle $y \in Z$.

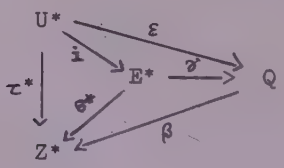
Beweis: Sei $d = d_o > d_1 > \ldots > d_i > \ldots > 0$ eine Nullfolge und

$$W_i = \{w \in \mathbb{C}^k \mid |w_j| < d_i,\ j = 1,\ldots,k\}.$$

Angenommen, es gibt für jedes i einen Punkt $y_i \in Z$ und ein $x_i \in \tau^{-1}(y_i) \cap (\partial V \times W_i)$, so konvergiert die Folge (x_i) gegen einen Punkt $\hat{x} \in \partial V$, während die Folge (y_i) gegen einen Punkt $\hat{y} \in \overline{Z}$ konvergiert. Da $\hat{y} = \tau(\hat{x})$ ist das ein Widerspruch zu $\tau(\partial V) \cap \overline{Z} = \emptyset$.

Im Folgenden wird die Abbildung τ auf die Umgebung $U = \tau^{-1}(Z) \cap (V \times W)$ von x_o beschränkt. Sei $S_o \subset E$ die Verzweigungsmenge der analytischen Überlagerung $\sigma: E \longrightarrow Z$ (vgl. 1.16), $S' = \sigma^{-1}(\sigma(S_o)) \subset E$ und $S = \tau^{-1}(\sigma(S_o)) \subset U$. $S' \subset E$ und $S \subset U$ sind minde-

stens 1-codimensionale analytische Mengen und da σ auf $E^* = E - S'$ regulär ist, kann man nach Lemma 4.4 erreichen, dass τ auf $U^* = U - S$ regulär ist. Es bezeichne $Z^* = Z - \sigma(S_0)$, $\tau^* = \tau|U^*: U^* \longrightarrow Z^*$, $\sigma^* = \sigma|E^*: E^* \longrightarrow Z^*$ und $i: E^* \longrightarrow U^*$ die Injektionsabbildung. Sei $\mathcal{E} = \overline{\tau}^*_{\mathcal{B}}$ die τ^* zugeordnete einfache Zerlegung von U^* (vgl. 2.2), $Q = U^*/\mathcal{E}$ und $\varepsilon: U^* \longrightarrow Q$ die natürliche Abbildung auf den Quotientenraum. Dann gibt es Abbildungen $\gamma: E^* \longrightarrow Q$ und $\beta: Q \longrightarrow Z^*$, sodass das Diagramm



kommutiert. Da Q mit der Quotiententopologie versehen ist und $\tau^* = \beta \cdot \varepsilon$ sieht man, dass β stetig ist.

4.9. Hilfssatz. $\gamma: E^* \longrightarrow Q$ ist eine unverzweigte endlichblättrige Überlagerung.

Beweis: Es bleibt zu zeigen, dass Q ein lokalkompakter topologischer Raum und γ eine surjektive, lokaltopologische und kompakte Abbildung ist (vgl. 1.13). Da $\gamma = \varepsilon \cdot i$, ist auch γ stetig und nach Lemma 1.12 hat jede Niveaumenge von τ in U^* mit E^* einen nicht

leeren Durchschnitt, daher ist γ surjektiv. Aus Satz 2.11 folgt, dass ε eine offene Zerlegung ist. Da E^* von allen Niveaumengen von τ transversal geschnitten wird, ist damit auch γ eine offene Zerlegung, d.h. $\gamma: E^* \longrightarrow Q$ eine offene Abbildung. γ ist lokal umkehrbar eindeutig: Sei $q \in Q$, $y = \beta(q)$ und $x \in \gamma^{-1}(q) \subset \sigma^{*-1}(y)$. Da σ^* als unverzweigte Überlagerungsabbildung lokal umkehrbar eindeutig ist, gibt es Umgebungen $M = M(x) \subset E^*$ und $O = O(y) \subset \dot{Z}^*$ sodass $\sigma^*|M: M \longrightarrow O$ eineindeutig ist. $N = \gamma(M) \subset Q$ ist eine Umgebung von q und durch $N \xrightarrow{\beta} O \xrightarrow{\sigma^{*-1}} M$ ist die gesuchte lokale Umkehrung von γ gegeben. Es ist damit bewiesen, dass γ lokaltopologisch ist. Da Q nach Satz 2.12 ein hausdorffscher Raum ist, ist Q dann auch lokalkompakt; daher folgt, da β stetig und σ^* kompakt ist, dass γ kompakt ist.

Man kann nun erreichen, dass $\gamma: E^* \longrightarrow Q$ eine topologische Abbildung wird. Sei g die Blätterzahl von γ. Eine Niveaumenge $A \subset U^*$ von τ^* hat dann mit E^* die paarweise verschiedenen Schnittpunkte $x_1, \ldots, x_g$. Man wählt Umgebungen $M_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, g$, sodass $\bar{M}_i \cap \bar{M}_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Bei genügender Verkleinerung des Polyzylinders W ist dann $A \cap (V \times W) \subset \bigcup_{i=1}^{g} M_i \times W$, d.h. $A \cap (V \times W)$ zerfällt in g Zusammenhangskomponenten, die jeweils genau einen Schnittpunkt mit E^* besitzen. Versieht man nun Q mit der durch die topologi-

sche Abbildung γ: $E^* \longrightarrow Q$ induzierten komplexen Struktur, so ist bewiesen:

4.10. Hilfssatz. γ: $E^* \longrightarrow Q$ ist eine biholomorphe Abbildung.

Um zu zeigen, dass τ quasiregulär ist, muss eine holomorphe Abbildung $p: U \longrightarrow \mathbb{C}^m$ gemäss 4.2 konstruiert werden. Sei $p^*: U^* \longrightarrow E^* \subset \mathbb{C}^m$ gegeben durch $p^* = \gamma^{-1} \circ \varepsilon$. Da $\tau^* = \sigma^* \circ p^*$ und da σ^* als unverzweigte analytische Überlagerung lokal eine biholomorphe Abbildung ist, ist p^* holomorph. Für einen Punkt $x \in U^*$ sind also die Koordinaten $p_1^*(x), \ldots, p_m^*(x)$ des Punktes $p^*(x) \in E^*$ holomorphe beschränkte Funktionen von x. Nach einem RIEMANNschen Satz (vgl. [17, III § 3]) lassen sie sich zu in ganz U holomorphen Funktionen $p_1(x)$, $\ldots, p_m(x)$ fortsetzen. Die dadurch eindeutig bestimmte Abbildung $p: U \longrightarrow E \subset \mathbb{C}^m$ hat als Fasern die Niveaumengen von τ in U und es ist $p|E$ = Identität, daher ist nach Lemma 4.4 die Abbildung p in x_0 regulär und Satz 4.7 ist bewiesen.

4.11. Eine direkte Folgerung von Satz 4.7 ist der

Satz. X und Y seien komplexe Mannigfaltigkeiten und τ: $X \longrightarrow Y$ sei eine surjektive holomorphe Abbildung. τ ist genau dann regulär, wenn

i) die Fasern von τ gleichdimensionale komplexe Untermannigfaltigkeiten von X sind und

ii) lokal die durch τ bestimmte Zerlegung einfach ist, d.h. wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ beliebig kleine Umgebungen $N(x)$ gibt, sodass die Fasern von $\tau|N$ in N zusammenhängend sind.

Beweis: Dass die Bedingungen i) und ii) notwendig sind, folgt sofort aus der lokalen Beschreibung einer regulären Abbildung als Projektion (vgl. Lemma 4.3).

Umgekehrt ist nach i) und Satz 4.7 τ quasiregulär, d.h. für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung $U = U(x)$ und eine reguläre holomorphe Abbildung $p: U \longrightarrow \mathbb{C}^m$, deren Fasern die Niveaumengen von $\tau|U$ sind. Ist $N = N(x) \subset U$ eine Umgebung gemäss ii), so stimmen die Fasern von $p' = p|N$ und $\tau' = \tau|N$ wegen ihrer Zusammenhangseigenschaften überein. Nach Lemma 2.5 gibt es eine biholomorphe Abbildung $\sigma: p(N) \longrightarrow \tau(N)$ sodass $\tau' = \sigma \circ p'$, daher ist mit p' auch τ' regulär.

§ 5. AUFLÖSUNG DER SINGULARITÄTEN GEWISSER QUASIREGULÄRER HOLOMORPHER ABBILDUNGEN.

X und Y bezeichnen in diesem Paragraphen wieder zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Topologie.

5.1. Satz. Sei $\tau: X \longrightarrow Y$ eine surjektive kompakte holomorphe Abbildung, deren Fasern gleichdimensionale zusammenhängende*) komplexe Untermannigfaltigkeiten von X sind. Dann gibt es zu jedem Punkt $y_0 \in Y$ eine Umgebung $Z = Z(y_0)$ sodass

i) $T = \tau^{-1}(Z)$ Faserraum einer differenzierbaren Faserung $\mathcal{T} = (T,\pi,F,E)$ über $F = \tau^{-1}(y_0)$ als Basis und mit zu F transversalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten E_f, $f \in F$, als Fasern wird und

ii) für jeden Punkt $y \in Z$ die Abbildung $\pi_y = \pi|\tau^{-1}(y): \tau^{-1}(y) \longrightarrow F$ eine unverzweigte Überlagerung ist.

Beweis: $F = \tau^{-1}(y_0)$ ist eine r-dimensionale zusammenhängende kompakte komplexe Untermannigfaltigkeit der n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit X. X und F sind bezüglich der unterliegenden diffe-

*) Auf Grund von Satz 2.7 ist die Bedingung, dass die Fasern zusammenhängend sind, nicht wesentlich.

renzierbaren Strukturen C^∞- Mannigfaltigkeiten der reellen Dimension 2n bzw. 2r. Daher besitzt F eine Tubenumgebung, d.h. eine Umgebung $T' = T'(F) = \{x \in X | d(x,F) < \varepsilon\}$ zusammen mit einer zu F transversalen Schar reell $2(n-r)$-dimensionaler C^∞-Mannigfaltigkeiten E'_f, $f \in F$, d.h. $E'_f \cap F = f$, der Tangentialraum von T'in f ist direkte Summe der Tangentialräume von F in f und E'_f in f und jeder Punkt $x \in T'$ liegt auf genau einer Mannigfaltigkeit E'_f. T' ist Faserraum einer differenzierbaren Faserung $\mathcal{T}' = (T',\pi',F,E')$

(vgl. dazu [16, IV, § 5] und [28, IV, § 10]). Dabei ist für einen Punkt $x \in T'$ die Projektion $\pi'(x)$ gleich dem Schnittpunkt f der durch x gehenden Mannigfaltigkeit E'_f mit F.

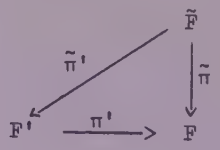
Aus Satz 2.8 und Lemma 2.8 folgt weiterhin, dass es eine Umgebung $Z = Z(y_o)$ gibt, sodass $T = \tau^{-1}(Z) \subset T'$. Nach Satz 4.7 ist τ quasiregulär; man kann also wegen der Kompaktheit von F durch Verkleinerung von Z erreichen, dass die Mannigfaltigkeiten $E_f = E'_f \cap T$ alle Fasern $\tau^{-1}(y)$, $y \in Z$, transversal schneiden und T lokale Produktstruktur besitzt. Setzt man $\pi = \pi'|T$, so erhält man eine Faserung $\mathcal{T} = (T,\pi,F,E)$, wobei π im allgemeinen keine holomorphe sondern nur eine differenzierbare Abbildung ist. Damit ist Behauptung i) bewiesen. Behauptung ii) folgt sofort aus der Konstruktion der Abbildung π_y.

5.2. Korollar. Die in Satz 5.1 konstruierte Faserung $T = (T,\pi,F,E)$ gestattet eine quasitransversale Zerlegung Σ. Bezeichnet $S \subset T$ die Singularitätenmenge von τ in T (vgl. 1.5), so ist für $\tilde{y} \in \tilde{Z} = \tau(T - S)$ und $\tilde{F} = \tau^{-1}(\tilde{y})$ die Überlagerung $\tilde{\pi} = \pi|\tilde{F}: \tilde{F} \longrightarrow F$ eine Majorante von Σ.

Beweis: Eine Zerlegung Σ von T ist gegeben durch die Elemente $\tau^{-1}(y)$, $y \in Z$. Da τ quasiregulär ist, folgt aus der lokalen Beschreibung von τ (vgl. 4.3), dass Σ eine quasitransversale Zerlegung von T ist.

Wählt man für einen Punkt $y \in Z$ eine genügend kleine Umgebung $N = N(y) \subset Z$, so erhält man durch Beschränkung der transversalen Schar E_f, $f \in F$, von T auf $T' = \tau^{-1}(N)$ eine Tubenumgebung $T' = (T',\pi',F',E')$ von $F' = \tau^{-1}(y)$. Ist $\tilde{y} \in \tilde{Z} \cap N$, $\tilde{F} = \tau^{-1}(\tilde{y})$, $\tilde{\pi} = \pi|\tilde{F}$, $\pi' = \pi|F'$ und $\tilde{\pi}' = \pi'|\tilde{F}$, so hat man ein kommutatives Diagramm

(*)



von Überlagerungsabbildungen. Ist $y \in \tilde{Z}$, so ist τ in allen Punkten $x \in F' = \tau^{-1}(y)$ regulär und $\tilde{\pi}'$ ist eine topologische Abbildung, d.h. für alle allgemeinen Fasern $\tilde{F} = \tau^{-1}(\tilde{y})$, $\tilde{y} \in \tilde{Z}$, sind die Überlagerungen $\tilde{\pi}: \tilde{F} \longrightarrow F$ äquivalent. Daher ist das Diagramm (*) unab-

hängig von $\tilde{y} \in \tilde{Z} \cap N$.

5.3. Eine direkte Anwendung von Satz 5.1 ist der

Satz. Sei $\tau: X \longrightarrow Y$ eine kompakte quasireguläre holomorphe Abbildung, sodass die Fasern von τ endliche Fundamentalgruppen von der gleichen Ordnung haben. Dann ist τ regulär.

Beweis: Jede Überlagerung $\pi_y: \tau^{-1}(y) \longrightarrow \tau^{-1}(y_o)$ zweier Fasern von τ ist notwendig eine topologische Abbildung. Daher ist lokal die durch τ bestimmte Zerlegung einfach und nach Satz 4.11 ist τ regulär.

Ein Spezialfall hiervon ist das

Korollar. Jede kompakte holomorphe Abbildung $\tau: X \longrightarrow Y$ deren Fasern gleichdimensionale zusammenhängende und einfach zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten sind, ist regulär.

5.4. Mit Hilfe der Ergebnisse von § 3 lässt sich nun für alle quasiregulären holomorphen Abbildungen mit kompakter Faser lokal ein Verfahren angeben, die Singularitäten "aufzulösen". Es gilt der

Satz. Seien X und Y komplexe Mannigfaltigkeiten und sei $\tau: X \longrightarrow Y$ eine surjektive holomorphe Abbil-

dung, deren Fasern gleichdimensionale zusammenhängende kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten sind. Dann gibt es zu jedem Punkt $y_o \in Y$ eine Umgebung $Z = Z(y_o)$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{T} & \xrightarrow{\hat{\tau}} & \hat{Z} \\ \downarrow{\scriptstyle \chi} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ T & \xrightarrow{\tau} & Z \end{array}$$

mit folgenden Eigenschaften:

i) $T = \tau^{-1}(Z)$.

ii) $\hat{T}$ und $\hat{Z}$ sind komplexe Mannigfaltigkeiten.

iii) $\hat{\tau}$ ist eine reguläre holomorphe Abbildung.

iv) $\chi: \hat{T} \longrightarrow T$ ist eine unverzweigte endlichblättrige analytische Überlagerung.

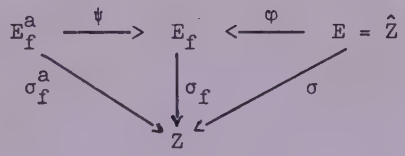
v) $\sigma: \hat{Z} \longrightarrow Z$ ist eine endlichblättrige analytische Überlagerung. Bezeichnet $S \subset T$ die Singularitätenmenge von τ in T und $V \subset \hat{Z}$ die Verzweigungsmenge von σ in $\hat{Z}$, so ist $\sigma(V) = \tau(S)$.

vi) Für eine Faser $F_y = \tau^{-1}(y)$, $y \in Z$, von τ zerfällt $\chi^{-1}(F_y)$ in endlich viele Zusammenhangskomponenten $\hat{F}^\gamma$, $\gamma = 1,\ldots,c$, wobei $\hat{F}^\gamma$ eindeutig bestimmte äquivalente normale (vgl. 3.2) Überlagerungsräume der allgemeinen Faser $\tilde{F}$ von τ sind. Ist $\tilde{\pi}: \tilde{F} \longrightarrow F$ (vgl. 5.2) eine normale Überlagerung*), so ist $\hat{F}^\gamma = \tilde{F}$.

---

*) Das ist z.B. der Fall, wenn die Fundamentalgruppe von F abelsch ist.

Beweis: Nach Satz 5.1 gibt es zu jedem Punkt $y_o \in Y$ eine Umgebung $Z = Z(y_o)$, sodass $T = \tau^{-1}(Z)$ Faserraum einer Faserung $\mathcal{T} = (T,\pi,F,E)$ über $F = \tau^{-1}(y_o)$ als Basis ist. Ist $f \in F$, so gibt es, da τ quasiregulär ist durch f eine zu den Fasern $\tau^{-1}(y)$, $y \in Z$, transversale komplexe Mannigfaltigkeit E_f^a und $\sigma_f^a = \tau|E_f^a: E_f^a \longrightarrow Z$ ist eine analytische Überlagerung. Ist $E_f = \pi^{-1}(f)$, so erhält man durch Projektion entlang den lokalen Niveaumengen von τ eine topologische Abbildung $\psi: E_f^a \longrightarrow E_f$. Ausserdem gibt es eine topologische Abbildung $\varphi: E \longrightarrow E_f$. Man setzt nun $\hat{Z} = E$, versieht es mit der durch die topologische Abbildung $\varphi^{-1}\cdot\psi: E_f^a \longrightarrow E$ induzierten Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit und hat das kommutative Diagramm



wobei $\sigma_f = \tau|E_f$ und $\sigma = \sigma_f\cdot\varphi$. Daher ist $\sigma: \hat{Z} \longrightarrow Z$ eine analytische Überlagerung. Durch die topologische Abbildung $\psi: E_f^a \longrightarrow E_f$ lässt sich auch E_f zu einer komplexen Mannigfaltigkeit machen, als Teilmenge von T ist E_f jedoch i.a. keine analytische Menge.

Nach Korollar 5.2 gestattet die Faserung $\mathcal{T}$ eine quasitransversale Zerlegung Σ, sodass für eine

allgemeine Faser $\tilde{F} = \tau^{-1}(\tilde{y})$ die Überlagerung $\tilde{\pi} = \pi|\tilde{F}: \tilde{F} \longrightarrow F$ eine Majorante von Σ ist. Sei $\hat{\pi}: \hat{F} \longrightarrow F$ die dazu nach Lemma 3.2 existierende normale Majorante von Σ. Nach Korollar 3.14 erhält man das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \hat{F} & \xleftarrow{p} & \hat{F} \times \hat{Z} & \xrightarrow{\hat{\tau}} & \hat{Z} \\ \downarrow{\scriptstyle \hat{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \chi} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ F & \xleftarrow{\pi} & T & \xrightarrow{\tau} & Z \end{array}$$

wobei p und $\hat{\tau}$ die Projektionen von $\hat{F} \times \hat{Z}$ auf die beiden Faktoren bezeichnen. Setzt man nun $\hat{T} = \hat{F} \times \hat{Z}$ und versieht es mit der durch die unverzweigte Überlagerung $Q: \hat{T} \longrightarrow T$ induzierten komplexen Struktur, so werden sowohl $\hat{T}$ ais auch die Zusammenhangskomponenten von $\chi^{-1}(\tau^{-1}(y))$, $y \in Z$, komplexe Mannigfaltigkeiten. Da $\hat{F} \times \hat{Z}$ nach dieser Definition als komplexe Mannigfaltigkeit nicht notwendig Produktstruktur besitzt, ist die Abbildung $p: \hat{F} \times \hat{Z} \longrightarrow \hat{F}$ i.a. nicht holomorph, sondern nur differenzierbar. Dagegen ist die Abbildung $\hat{\tau}: \hat{T} \longrightarrow \hat{Z}$ holomorph: Bezeichnet $V \subset \hat{Z}$ die Verzweigungsmenge der analytischen Überlagerung $\sigma: \hat{Z} \longrightarrow Z$, so ist $\hat{\tau}|\hat{T} - \hat{\tau}^{-1}(V): \hat{T} - \hat{\tau}^{-1}(V) \longrightarrow \hat{Z} - V$ eine holomorphe Abbildung, da die komplexen Strukturen auf $\hat{T}$ und $\hat{Z}$ durch die Überlagerungen Q und σ induziert sind. Da $\hat{\tau}^{-1}(V) \subset \hat{T}$ eine mindestens 1-codimensionale

analytische Menge ist, folgt die Holomorphie von $\hat{\tau}$ aus dem RIEMANNschen Fortsetzungssatz (vgl. [17, III, § 3]). Schliesslich folgt aus Satz 4.11, dass $\hat{\tau}$ regulär ist und Satz 5.4 ist bewiesen.

5.5. Als Folgerung erhält man noch den

Satz. Ist $\tau: X \longrightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, deren Fasern gleichdimensionale zusammenhängende kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten sind, so ist (X,τ,Y) ein differenzierbarer SEIFERTscher Faserraum (vgl. 3.15). (X,τ,Y) gestattet genau dann die Struktur einer differenzierbaren Faserung, wenn τ regulär ist.

Beweis: Aus Korollar 5.2 und Satz 3.15 folgt sofort, dass (X,τ,Y) ein differenzierbarer SEIFERTscher Faserraum ist. Besitzt (X,τ,Y) lokal die Struktur eines direkten Produktes, so ist τ nach Satz 4.11 regulär und umgekehrt ist nach Satz 4.5 $\tau: X \longrightarrow Y$ eine differenzierbare Faserung.

5.6. Charakteristische Beispiele für eine kompakte quasireguläre holomorphe Abbildung und ein in 5.4 beschriebenes Diagramm erhält man durch das folgende von R. REMMERT angegebene Konstruktionsprinzip:

Gegeben seien kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten M, N und biholomorphe Abbildungen $\mu: M \longrightarrow M$

$\nu: N \longrightarrow N$ mit $\mu \cdot \mu$ = Identität, $\nu \cdot \nu$ = Identität. μ sei fixpunktfrei und die Menge V der Fixpunkte von ν sei nicht leer und echt in N enthalten. Bildet man die Quotientenräume $X = (M \times N)/(\mu \times \nu)$ und $Y = N/\nu$, so seien sie, versehen mit der natürlichen komplexen Struktur, komplexe Mannigfaltigkeiten. Die natürlichen Abbildungen $\chi: M \times N \longrightarrow X$ und $\sigma: N \longrightarrow Y$ sind zweiblättrige analytische Überlagerungen. Da μ fixpunktfrei ist, ist auch $\mu \times \nu$ fixpunktfrei und χ ist unverzweigt; die Verzweigungsmenge von σ ist gleich der Menge V der Fixpunkte von ν. Bezeichnet $\hat{\tau}: M \times N \longrightarrow N$ die natürliche Projektion, so ist $(\sigma \cdot \hat{\tau}) \cdot (\mu \times \nu) = \sigma \cdot \hat{\tau}$. Daher gibt es eine wohldefinierte holomorphe Abbildung $\tau: X \longrightarrow Y$, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\hat{\tau}} & N \\ \chi \downarrow & & \downarrow \sigma \\ X & \xrightarrow{\tau} & Y \end{array}$$

kommutiert. Es gilt nun:

$\tau: X \longrightarrow Y$ ist eine kompakte quasireguläre holomorphe Abbildung mit der Singularitätenmenge $S = \chi(M \times V) \subset X$. Die Fasern von τ sind für $y \notin \sigma(V)$, d.h. $\tau^{-1}(y) \not\subset S$, biholomorph äquivalemt zu M und für $y \in \sigma(V)$, d.h. $\tau^{-1}(y) \subset S$, biholomorph äquivalent zu M/μ.

Beweis: Die Abbildung χ ist lokal biholomorph und die Abbildung f ist regulär. Daher gibt es für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U = U(x)$ und eine reguläre holomorphe Abbildung $p: U \longrightarrow N$, sodass die Fasern von p gleich den Zusammenhangskomponenten von $\tau|U$ sind. Daher ist τ quasiregulär und τ ist genau dann regulär in $x \in X$, wenn σ in $p(x)$ unverzweigt ist, d.h. $S = \chi(M \times V)$. Ist $y \in Y$, so ist $\tau^{-1}(y) = \chi(f^{-1}(\sigma^{-1}(y)) = \chi(M \times \sigma^{-1}(y))$.

Für $y \notin \sigma(V)$ besteht $\sigma^{-1}(y)$ aus zwei verschiedenen Punkten $u_1, u_2 \in Y - V$. Da $(\mu \times \nu)(M \times u_1) = M \times u_2$, ist $\chi(M \times u_1) = \chi(M \times u_2) = \tau^{-1}(y)$. und da $\nu(u_i) \neq u_i$, $i = 1,2$, ist die Abbildung $\chi|(M \times u_i): M \times u_i \longrightarrow \tau^{-1}(y)$ biholomorph.

Für $y \in \sigma(V)$ besteht $\sigma^{-1}(y)$ aus nur einem Punkt $v \in V$ mit $\nu(v) = v$. Daher ist $(\mu \times \nu)(M \times v) = \mu(M) \times v$ und $\tau^{-1}(y) = \chi(M \times v) = (M \times v)/(\mu \times \nu)$ ist biholomorph äquivalent zu M/μ.

Ein einfaches Beispiel erhält man, indem man für M einen eindimensionalen komplexen Torus und für N die komplex projektive Gerade mit den homogenen Koordinaten (u_o, u_1) setzt. Sei $M = \mathbb{C}/H$, wobei $H = \{n_1 + i \cdot n_2 \mid n_1, n_2$ ganz rational$\}$ das von 1 und $i = \sqrt{-1}$ erzeugte Periodengitter bezeichnet. Durch $\mu^*(z) = z + 1/2$, $z \in \mathbb{C}$, ist eine Abbildung $\mu^*: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben, die eine biholomorphe fixpunktfreie Abbildung $\mu: M \longrightarrow M$ mit $\mu \cdot \mu =$ Identität induziert.

Eine holomorphe Involution $\nu\colon N \longrightarrow N$ ist gegeben durch $\nu(u_o,u_1) = (u_o,-u_1)$. $Y = N/\nu$ ist wieder eine projektive Gerade, M/μ ist ein zu M nicht biholomorph äquivalenter Torus und X ist eine algebraische Fläche. Die Verzweigungsmenge von σ besteht aus den Punkten $(1,0)$ und $(0,1)$. Setzt man $\mu^*(z) = z + \frac{1+i}{2}$, so ist M/μ biholomorph äquivalent zu M und alle Fasern von τ sind biholomorph äquivalent.

LITERATURVERZEICHNIS.

[1] ABHYANKAR, S.: Local analytic geometry. New York 1964.

[2] ALEXANDROFF, P. und HOPF, H.: Topologie. Berlin 1935.

[3] BOURBAKI, N.: Topologie generale. Chap. I. Paris 1961.

[4] CARTAN, H.: Seminaire E.N.S. 1951/52.

[5] CARTAN, H.: Seminaire E.N.S. 1953/54.

[6] CARTAN, H.: Quotients of complex spaces. Contributions to function theory, 1 - 15, Bombay 1960.

[7] EHRESMANN, C.: Les connexions infinitesimales dans un espace fibre differentiable. Colloque de Topologie, 29 - 55, Brüssel 1950.

[8] FOX, R.H.: On topologies for function spaces. Bull. A.M.S. 51, 429 - 432 (1945).

[9] GRAUERT, H.: Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. 129, 223 - 259 (1955).

[10] GRAUERT, H. und REMMERT, R.: Komplexe Räume. Math. Ann. 136, 245 - 318 (1958).

[11] HAUSDORFF, F.: Mengenlehre. Berlin 1937.

[12] HOLMANN, H.: Seifertsche Faserräume. Manuskript.

[13] HUREWICZ, W. and WALLMAN, H.: Dimension Theory. Princeton 1948.

[14] KNESER, M.: Beispiel einer dimensionserhöhenden analytischen Abbildung zwischen überabzählbaren Mannigfaltigkeiten. Arch. Math. 11, 280 - 281 (1960).

[15] KUROSH, A.G.: The theory of groups. New York 1960.

[16] LANG, S.: Differentiable manifolds. New York 1962.

[17] OSGOOD, W.F.: Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1. Leipzig 1929.

[18] REMMERT, R.: Projektionen analytischer Mengen. Math. Ann. 130, 410 - 441 (1956).

[19] REMMERT, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. 133, 328 – 370 (1957).

[20] REMMERT, R. und STEIN, K.: Eigentliche holomorphe Abbildungen. Math. Zeitschr. 73, 159 – 189 (1960).

[21] REMMERT, R. und STEIN, K.: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. 126, 263 – 306 (1953).

[22] SEIFERT, H. und THRELFALL, W.: Lehrbuch der Topologie. Leipzig 1934.

[23] STEENROD, N.E.: The topology of fibre bundles. Princeton 1951.

[24] STEIN, K.: Analytische Projektionen komplexer Mannigfaltigkeiten. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, 97 – 107, Brüssel 1953.

[25] STEIN, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. 132, 63 – 93 (1956).

[26] STEIN, K.: Konvergenzsätze über analytische Mengen. Intern. Congr. of Math., Abstracts of short communications, 102, Edinburgh 1958.

[27] THULLEN, P.: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen im Raume von n komplexen Veränderlichen. Math. Ann. 111, 137 – 157 (1935).

[28] WHITNEY, H.: Geometric integration theory. Princeton 1957.

LEBENSLAUF.

Am 3. Juni 1939 wurde ich als erstes Kind des Oberregierungsrates Josef Fischer und seiner Ehefrau der Studienassessorin Erna Fischer, geb. Burkas, in Nürnberg geboren. Dort besuchte ich von 1945 bis 1949 die Volksschule und trat anschliessend in das Realgymnasium Nürnberg ein, an dem ich im Juli 1958 die Reifeprüfung ablegte.

Seit dem Wintersemester 1958/59 bin ich mit zwei Unterbrechungen Student der Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg; im 5. und 6. Semester (1961/62) studierte ich an der Technischen Hochschule in München und als Gasthörer an der Universität München und während des akademischen Jahres 1962/63 war ich "graduate student" an der Johns Hopkins University in Baltimore, U.S.A. Seit dem 7. Semester beschäftige ich mich unter Anleitung von Prof. Dr. R. Remmert vorwiegend mit komplexer Analysis.

Gerd Fischer

Fotodruck

– Wiltrud Hogl, Erlangen Brüxer Straße 9, Telefon 16 36 –